

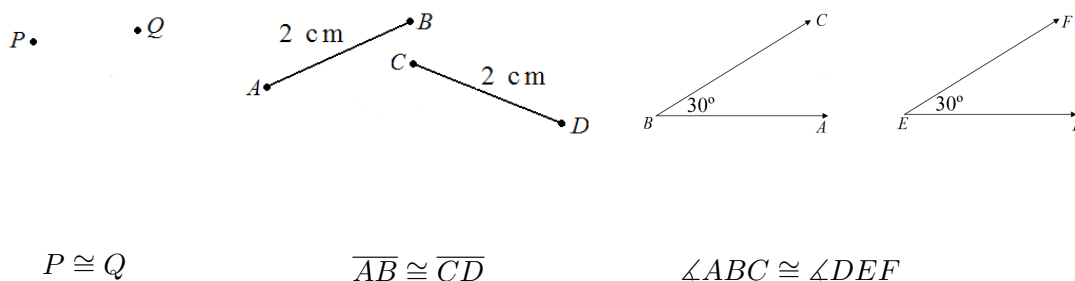
Capítulo 13

Geometría de Proporciones

En el presente capítulo estudiaremos las propiedades que cumplen las medidas de los lados de distintas figuras geométricas y como éstas pueden determinar relaciones entre distintas figuras, de distintos tamaños, y distintas posiciones. Veremos también propiedades de segmentos que cruzan a una circunferencia, y relacionaremos los ángulos y los lados de los triángulos rectángulos. Todas éstas herramientas te serán muy útiles al momento de enfrentarte a una cantidad importante de ejercicios en la PSU.

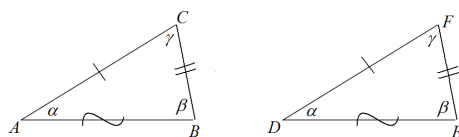
10.1. Congruencia

Dos figuras son congruentes si tienen la misma forma y el mismo tamaño, esto lo podemos verificar superponiendo las dos figuras, las cuales deben calzar exactamente. Tenemos que dos puntos cualesquiera siempre son congruentes así también dos rectas de la misma longitud y dos ángulos de la misma medida.



10.1.1. Congruencia de Triángulos

Dos triángulos son congruentes si sus ángulos y sus lados coinciden correspondientemente.

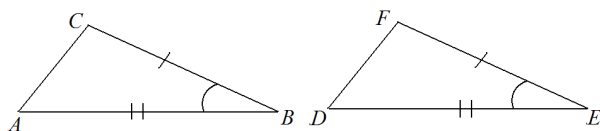


$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

10.1.2. Criterios de Congruencia

Criterio LAL (Lado-Ángulo-Lado)

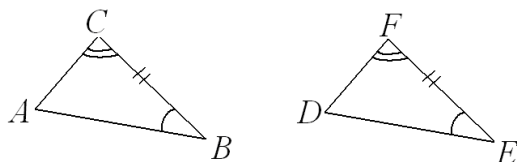
Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados congruentes y el ángulo comprendido entre ellos también lo es.



$$\begin{aligned}\overline{AB} &\cong \overline{DE} \\ \angle ABC &\cong \angle DEF \\ \overline{BC} &\cong \overline{EF}\end{aligned}$$

Criterio ALA (Ángulo-Lado-Ángulo)

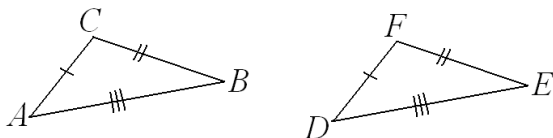
Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos congruentes y el lado comprendido entre estos también lo es.



$$\begin{aligned}\angle ABC &\cong \angle DEF \\ \overline{BC} &\cong \overline{EF} \\ \angle BCA &\cong \angle FED\end{aligned}$$

Criterio LLL (Lado-Lado-Lado)

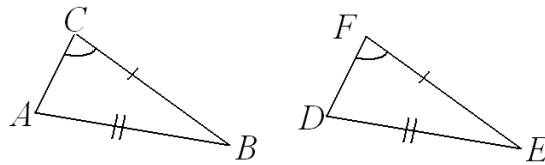
Dos triángulos son congruentes si tiene sus tres lados congruentes.



$$\begin{aligned}\overline{AB} &\cong \overline{DE} \\ \overline{BC} &\cong \overline{EF} \\ \overline{CA} &\cong \overline{FD}\end{aligned}$$

Criterio LLA (Lado-Lado-Ángulo)

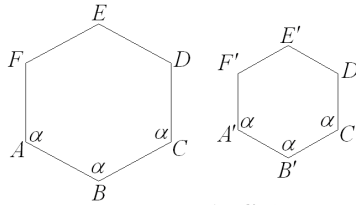
Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados congruentes y el ángulo opuesto al lado de mayor medida también lo es.



$$\begin{aligned}\overline{AB} &\cong \overline{DE} \\ \overline{BC} &\cong \overline{EF} \\ \angle BCA &\cong \angle EFD\end{aligned}$$

10.2. Semejanza

Dos figuras son semejantes si tienen la misma forma y sus ángulos son respectivamente iguales y sus lados proporcionales o sea que una es una ampliación o reducción de la otra.



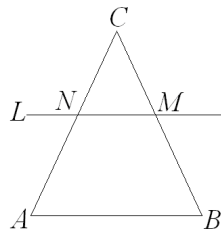
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{D'E'}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{E'F'}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{F'A'}}$$

10.2.1. Semejanza de Triángulos

Dos triángulos son semejantes si sus ángulos son iguales uno a uno respectivamente y los lados opuestos a estos ángulos son proporcionales.

10.2.2. Teorema fundamental para la existencia de Triángulos Semejantes

Toda paralela a un lado de un triángulo determina otro triángulo semejante al primero.



10.2.3. Criterios de Semejanza

Criterio AA (Ángulo-Ángulo)

Dos triángulos son semejantes si tienen dos de sus ángulos respectivamente iguales.

Criterio LAL (Lado-Ángulo-Lado)

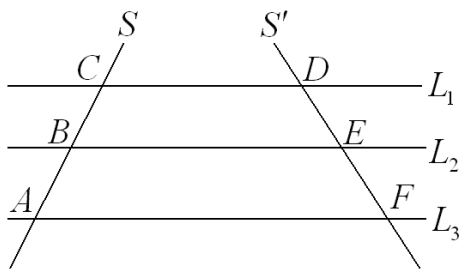
Dos triángulos son semejantes si dos de sus lados son proporcionales respectivamente y el ángulo comprendido entre ellos es congruente.

Criterio LLL (Lado-Lado-Lado)

Dos triángulos son semejantes si sus tres lados son proporcionales y sus ángulos congruentes respectivamente.

10.3. Teorema de Thales

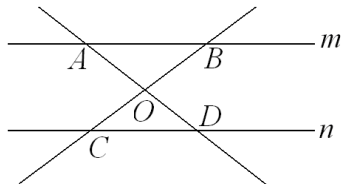
Si dos o más paralelas cortan a dos transversales determinan en ellas segmentos correspondientes proporcionales.



$$\frac{\overline{CB}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$

10.3.1. Aplicación al Teorema de Thales

Si $m \parallel n$. Entonces:

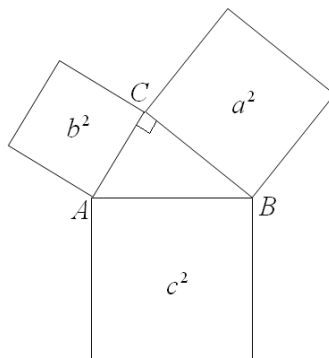


$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{BO}}{\overline{OC}}$$

10.4. Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre sus catetos, es igual al área del cuadrado construido sobre su hipotenusa.

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

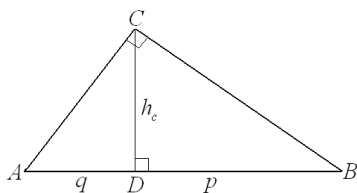


10.5. Teorema de Euclides

10.5.1. Teorema de Euclides referente a una Altura

En todo triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa es media proporcional geométrica entre los segmentos que ella determina sobre la hipotenusa.

p y q son la proyecciones de los catetos a y b sobre la hipotenusa respectivamente.

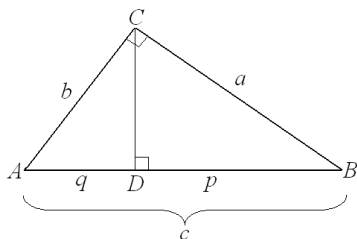


$$\frac{q}{h_c} = \frac{h_c}{p}$$

$$h_c^2 = p \cdot q$$

10.5.2. Teorema de Euclides referido a un Cateto

En todo triángulo rectángulo un cateto es media proporcional geométrica entre la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre ella.



$$a^2 = p \cdot c$$

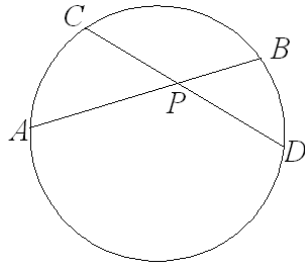
$$b^2 = q \cdot c$$

10.6. Relación Métrica en la Circunferencia

10.6.1. Teorema de las Cuerdas

Si dos cuerdas de una circunferencia se cortan, el producto de los segmentos determinados en una de ellas es igual al producto de los segmentos determinados en la otra.

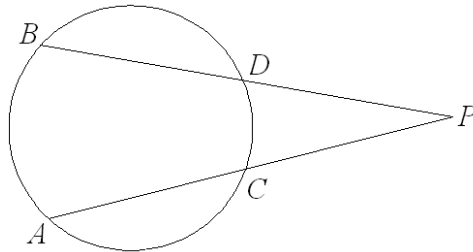
$$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$$



10.6.2. Teorema de las Secantes

Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos secantes, el producto de una de ellas por su segmento exterior es igual al producto de la otra secante por su segmento exterior.

$$\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD}$$

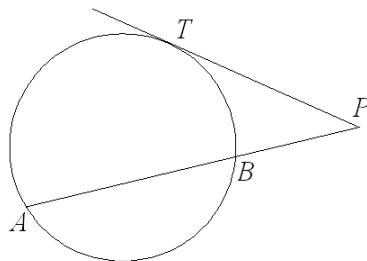


10.6.3. Teorema de la Tangente

Si desde un punto exterior de una circunferencia se trazan una tangente y una secante, la tangente es media proporcional geométrica entre la secante y su segmento externo.

$$\frac{\overline{PT}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PT}}$$

$$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$$

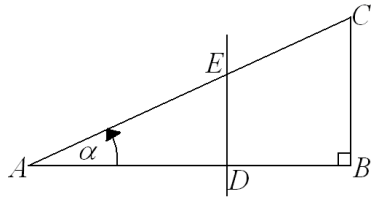


10.7. Trigonometría

La trigonometría es la rama de la matemática que relaciona la medida de los ángulos agudos en un triángulo rectángulo con razones entre los lados del mismo, dichas razones se conocen como *Razones Trigonométricas*.

10.7.1. Triángulos Rectángulos Semejantes

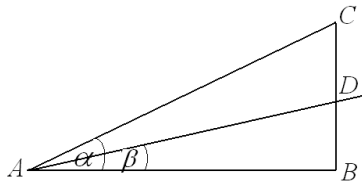
Si nos damos un triángulo ABC rectángulo y trazamos una paralela a uno de los catetos, formamos otro triángulo rectángulo ADE semejante al anterior (Utilizando el criterio AA de semejanza), entonces notemos que la razón entre los catetos del $\triangle ABC$ es equivalente con la razón de los catetos del $\triangle ADE$, es decir:



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}}$$

Lo anterior nos indica que para cualquier triángulo rectángulo donde uno de sus ángulos agudos es α , siempre tendrá la misma razón entre sus lados, es decir, no importan las dimensiones del triángulo.

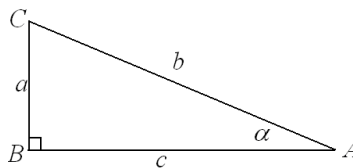
Lo único que puede cambiar esta razón no es la medida de los lados, más bien, la medida de su ángulos, de manera que:



$$\text{Si } \alpha \neq \beta \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \neq \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$$

10.7.2. Razones Trigonométricas

Sea el $\triangle ABC$ rectángulo en B , de catetos a y c y de hipotenusa b , donde a es el cateto opuesto a α y c es el cateto adyacente a α , como se muestra en la figura,



Entonces definiremos las siguientes razones trigonométricas

† **Seno del ángulo** α , se abrevia como $\text{sen}(\alpha)$, se define de la forma:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{b}$$

† **Coseno del ángulo** α , se abrevia como $\text{cos}(\alpha)$, se define de la forma:

$$\text{cos}(\alpha) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{b}$$

† **Tangente del ángulo** α , se abrevia como $\tan(\alpha)$, se define de la forma:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{c}$$

Y a sus recíprocos:

† **Cosecante del ángulo** α , se abrevia como $\text{cosec}(\alpha)$, se define de la forma:

$$\text{cosec}(\alpha) = \frac{1}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{a}$$

† **Secante del ángulo** α , se abrevia como $\text{sec}(\alpha)$, se define de la forma:

$$\text{sec}(\alpha) = \frac{1}{\text{cos}(\alpha)} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{c}$$

† **Cotangente del ángulo** α , se abrevia como $\text{cot}(\alpha)$, se define de la forma:

$$\text{cot}(\alpha) = \frac{1}{\text{tan}(\alpha)} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{a}$$

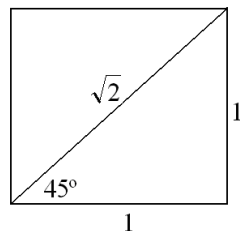
10.7.3. Ángulos Importantes y sus razones trigonométricas

1. Ángulo de 0° :

En éste caso podemos pensar que el ángulo de cero grados es aquel que está en un triángulo rectángulo donde su cateto opuesto es nulo, lo que implica que las razones $\text{sen}(0^\circ)$ y $\text{tan}(0^\circ)$ tiene valor 0, sin embargo en éste mismo triángulo la “hipotenusa” está sobre el “cateto adyacente” los que implicaría una magnitud igual para ambos, es decir, la razón $\text{cos}(0^\circ) = 1$.

2. Ángulo de 45° :

Pensemos en uno de los triángulos rectángulos isósceles que se forma al trazar una de las diagonales de un cuadrado de lado 1, ésta diagonal tiene valor igual a $\sqrt{2}^1$, entonces los ángulos basales de éste triángulo isósceles son iguales a 45° , de manera que podemos encontrar todas sus razones trigonométricas fácilmente:

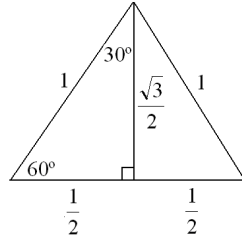


$$\begin{aligned}\text{sen}(45^\circ) &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{cos}(45^\circ) &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{tan}(45^\circ) &= \frac{1}{1} = 1 \\ \text{cosec}(45^\circ) &= \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \\ \text{sec}(45^\circ) &= \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \\ \text{cot}(45^\circ) &= \frac{1}{1} = 1\end{aligned}$$

¹Utilizando el Teorema de Pitágoras

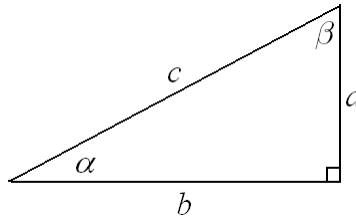
3. Ángulos de 30° y 60° :

Estos ángulos los podemos encontrar en uno de los triángulos rectángulos que se forman al dividir un triángulo equilátero de lado 1, a través de su altura, como se ve en la figura:



$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(30^\circ) &= \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2} \\ \operatorname{cos}(30^\circ) &= \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{tan}(30^\circ) &= \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \operatorname{sen}(60^\circ) &= \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{cos}(60^\circ) &= \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2} \\ \operatorname{tan}(60^\circ) &= \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

Ahora, observemos el siguiente triángulo rectángulo, notemos que $\alpha + \beta = 90^\circ$, lo que significa que son complementarios,



Observemos que:

$$\dagger \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{a}{c} = \operatorname{cos}(\beta)$$

$$\dagger \operatorname{cos}(\alpha) = \frac{b}{c} = \operatorname{sen}(\beta)$$

Ésta es una propiedad que se cumple para cualquier par de ángulos complementarios, de la cual se desprenden:

$$\dagger \operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{cos}(90^\circ - \alpha)$$

$$\dagger \operatorname{tan}(\alpha) = \operatorname{cot}(90^\circ - \alpha)$$

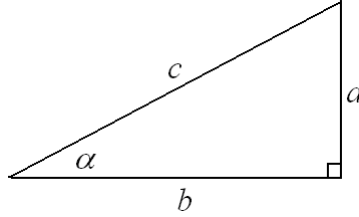
$$\dagger \operatorname{sec}(\alpha) = \operatorname{cosec}(90^\circ - \alpha)$$

En resumen podemos establecer la siguiente tabla de razones trigonométricas de ángulos importantes:

	$\operatorname{sen}(\)$	$\operatorname{cos}(\)$	$\operatorname{tan}(\)$	$\operatorname{cosec}(\)$	$\operatorname{sec}(\)$	$\operatorname{cot}(\)$
0°	0	1	0	No existe	1	No existe
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	1	0	No existe	1	No existe	0

10.7.4. Identidades Trigonómicas

Las identidades trigonométricas nacen de las relaciones que cumplen los lados de un triángulo rectángulo, a través de los teoremas como el de Pitágoras, por ejemplo, veamos el triángulo de la figura y las propiedades que cumplen sus lados



En él se cumple la relación descrita por Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow \text{Por el Teorema de Pitágoras, ahora si dividimos a ambos lados por } c^2 \text{ obtenemos}$$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \rightarrow \text{Como podrás darte cuenta el primer término del lado izquierdo de ésta igualdad corresponde al seno del ángulo } \alpha, \text{ y el segundo término corresponde al coseno. Por lo tanto:}$$

$$\text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha) = 1 \rightarrow \text{Lo que es válido para cualquier valor de } \alpha.$$

Ésta es conocida *Identidad Trigonómica Fundamental*, y de ella podemos obtener otras identidades importantes, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha) &= 1 \quad / \div \text{cos}^2(\alpha) \\ \frac{\text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha)}{\text{cos}^2(\alpha)} &= \frac{1}{\text{cos}^2(\alpha)} \\ \frac{\text{sen}^2(\alpha)}{\text{cos}^2(\alpha)} + \frac{\text{cos}^2(\alpha)}{\text{cos}^2(\alpha)} &= \left(\frac{1}{\text{cos}(\alpha)}\right)^2 \\ \left(\frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{cos}(\alpha)}\right)^2 + 1 &= \left(\frac{1}{\text{cos}(\alpha)}\right)^2 \\ (\tan(\alpha))^2 + 1 &= (\sec(\alpha))^2 \\ \tan^2(\alpha) + 1 &= \sec^2(\alpha) \\ \Rightarrow \sec^2(\alpha) - \tan^2(\alpha) &= 1 \end{aligned}$$

Realizando el mismo proceso pero ésta vez dividiendo inicialmente por $\text{sen}^2(\alpha)$, obtenemos la siguiente identidad:

$$\text{cosec}^2(\alpha) - \cot^2(\alpha) = 1$$

De manera que hemos obtenido éstas tres importantes identidades de la trigonometría:

$$\dagger \text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha) = 1$$

$$\dagger \sec^2(\alpha) - \tan^2(\alpha) = 1$$

$$\dagger \text{cosec}^2(\alpha) - \cot^2(\alpha) = 1$$

10.7.5. Ecuaciones Trigonómicas

Una ecuación trigonométrica es una ecuación en que uno, o ambos miembros de la igualdad poseen la o las incógnitas en una razón trigonométrica.

♠ Ejemplo:

† $\text{sen}(x) + 2 = \cos(y)$, es una ecuación trigonométrica.

† $\text{sen}(30) + 2x^2 = \cos(60) - y$, NO es una ecuación trigonométrica.

Para resolver éste tipo de ecuaciones generalmente se utilizan las identidades trigonométricas vistas anteriormente y/o los valores de las razones trigonométricas en ángulos conocidos.

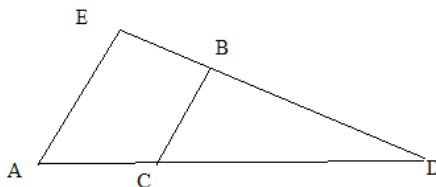
♠ Ejemplo:

$$\begin{aligned}\sqrt{8 \text{sen}(x) - 3} + 4 &= 5 \\ \sqrt{8 \text{sen}(x) - 3} &= 5 - 4 \\ \sqrt{8 \text{sen}(x) - 3} &= 1 \\ \Rightarrow 8 \text{sen}(x) - 3 &= 1 \\ 8 \text{sen}(x) &= 1 + 3 \\ 8 \text{sen}(x) &= 4 \\ \text{sen}(x) &= \frac{4}{8} \\ \text{sen}(x) &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow x &= 30^\circ\end{aligned}$$

10.8. Mini Ensayo XIII Geometría de Proporciones

1. $\overline{AE} // \overline{CB}$. Determine la medida de \overline{DB} si $\overline{AD} = 20 \text{ cm}$, $\overline{AC} = 6 \text{ cm}$ y $\overline{ED} = 18 \text{ cm}$

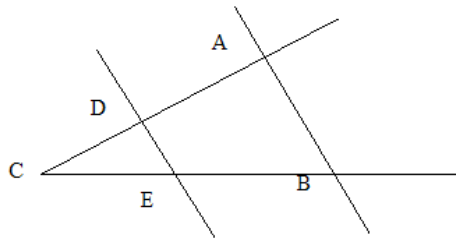
- a) 12,6 cm
- b) 15 cm
- c) 11 cm
- d) 13 cm
- e) 18 cm



2. Si $\overline{DE} // \overline{AB}$. Entonces es correcto:

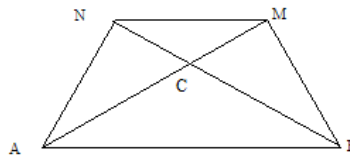
- I. $\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}$
- II. $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}}$
- III. $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{CD}}$

- a) Solo I
- b) Solo II
- c) Solo III
- d) II y III
- e) Todas



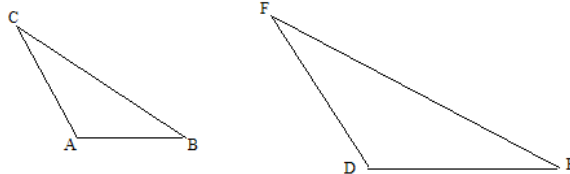
3. $ABMN$ es trapecio, si $\overline{NC} = 8$, $\overline{MC} = 12$ y $\overline{BC} = 15$, entonces $\overline{AC} =$

- a) 22,5 cm
- b) 16,6 cm
- c) 10 cm
- d) 11 cm
- e) 12 cm



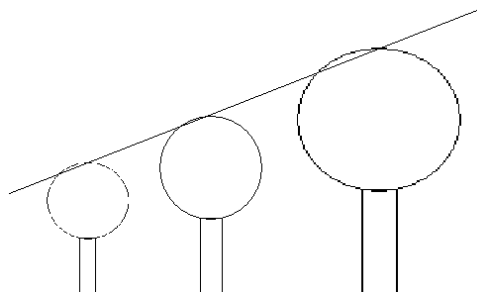
4. Los $\triangle ABC$ y DEF son semejantes, si $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 12$, $\overline{DE} = 10$ y $\overline{DF} = 7,5$, determine el valor de $\overline{AC} + \overline{EF}$

- a) 19,7
- b) 20,5
- c) 18,7
- d) 15
- e) 1



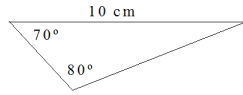
5. 3 árboles se encuentran alineados como se muestra en la figura, el más pequeño mide 2 m y el mediano 3 m, si la distancia entre cada par de árboles es de 3 m, ¿cuánto mide el árbol más alto?

- a) 3 m
- b) 3,5 m
- c) 4 m
- d) 4,5 m
- e) 5 m

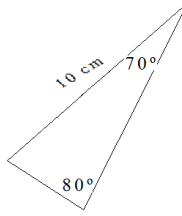


6. ¿Qué \triangle s son congruentes?

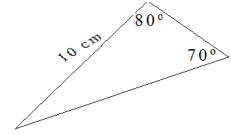
I.



II.



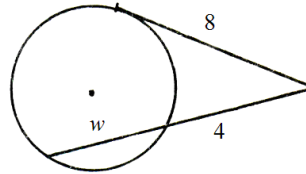
III.



- a) I y II
- b) I y III
- c) II y III
- d) I, II y III
- e) Ninguno.

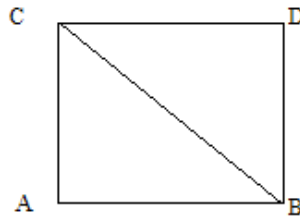
7. En la figura, la tangente es igual a 8, y el segmento exterior de la secante es igual a 4, entonces el valor de w es igual a:

- a) 2
- b) 4
- c) 12
- d) 16
- e) Ninguna de las anteriores.



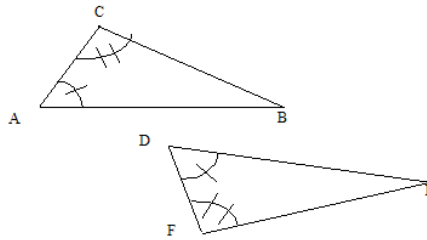
8. Un alumno para demostrar que en el cuadrado de la figura el $\triangle ABC \cong \triangle BCD$ determinó que $\overline{AB} \cong \overline{BD}$, que $\overline{AC} \cong \overline{DC}$ y que el $\angle CAB \cong \angle BDC$, por ser rectos, ¿qué criterio de congruencia utilizó?

- a) LLL
- b) LAL
- c) ALA
- d) AAL
- e) LLA



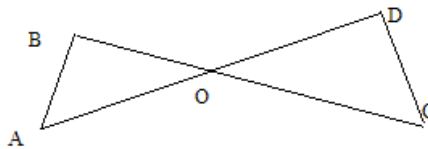
9. En la figura, el $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, entonces se verifica que:

- a) $\overline{AC} \cong \overline{DF}$
- b) $\overline{BC} \cong \overline{DE}$
- c) $\overline{AB} \cong \overline{FE}$
- d) $\overline{AC} \cong \overline{FE}$
- e) $\overline{AB} \cong \overline{FD}$



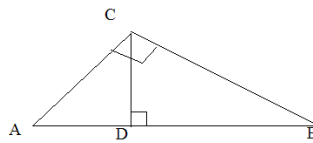
10. Para demostrar que los \triangle s AOB y COD de la figura, son congruentes, es necesario saber que:

- a) $\overline{AB} \cong \overline{DC}$
- b) $\angle BAO \cong \angle DCO$
- c) $\overline{AB} \perp \overline{CD}$
- d) $\overline{AO} \cong \overline{DO}$ y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
- e) $\overline{BO} \cong \overline{CO}$ y $\overline{AO} \cong \overline{DO}$



11. En la figura $\overline{AD} = 3\text{ m}$ y $\overline{AC} = 5\text{ m}$, entonces $\overline{BC} =$

- a) $\frac{16}{3}\text{ m}$
- b) $\frac{4}{3}\text{ m}$
- c) $\frac{25}{3}\text{ m}$
- d) $5\sqrt{2}\text{ m}$
- e) $(5\sqrt{2} - 3)\text{ m}$



12. Los catetos de un \triangle rectángulo miden 3 cm y 4 cm , determine la proyección mayor de los catetos sobre la hipotenusa.

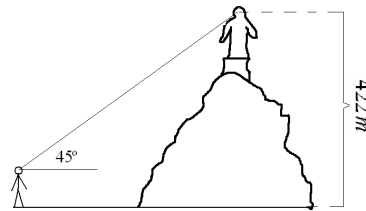
- a) $1,8\text{ cm}$
- b) $3,2\text{ cm}$
- c) 4 cm
- d) 5 cm
- e) $2,5\text{ cm}$

13. ¿Cuál es el valor de $\sin(30^\circ) + \cos(60^\circ)$?

- a) 0
- b) $\frac{1}{2}$
- c) -1
- d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- e) 1

14. Los ojos de la virgen del cerro San Cristobal están a una altura de 422 m como lo muestra la figura, una persona de 2 m de altura la ve directo a los ojos desde Av. Recoleta con un ángulo de inclinación de 45° , ¿cuál es la distancia que separa sus miradas?

- a) 840 m
- b) $840\sqrt{2}$ m
- c) $420\sqrt{2}$ m
- d) 420 m
- e) Ninguna de las anteriores.



15. ¿Cuál de las siguientes expresiones es(son) equivalente(s) a $\tan(\alpha)$?

I. $\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$ II. $\sqrt{\frac{1 - \cos^2(\alpha)}{1 - \sin^2(\alpha)}}$ III. $\frac{1}{\operatorname{cosec}(\alpha)} \cdot \sec(\alpha)$

- a) Solo I
- b) Solo II
- c) I y II
- d) II y III
- e) Ninguna de las anteriores.

16. $\sin^2(89) + \sin^2(1) =$

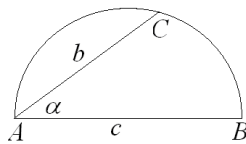
- a) 89
- b) 1
- c) 90
- d) $89^2 + 1$
- e) No se puede determinar.

17. Un avión próximo a aterrizar, se encuentra a una altura de 1.350 m. ¿A qué distancia del aeropuerto está el avión si el piloto lo observa con un ángulo de depresión de 30° ?

- a) 1.350 m
- b) 2.700 m
- c) $90\sqrt{3}$ m
- d) $900\sqrt{3}$ m
- e) 270 m

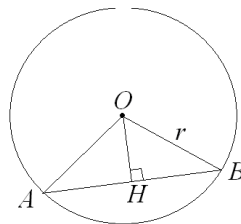
18. En la semi circunferencia de la figura, el valor de $\frac{b}{c}$ es:

- a) $\cos(\alpha)$
- b) $\text{sen}(\alpha)$
- c) $\tan(\alpha)$
- d) $\sec(\alpha)$
- e) $\text{cosec}(\alpha)$



19. En la figura siguiente, en la circunferencia de centro O y radio r se dibuja el $\triangle ABO$, ¿cuál es el valor de \overline{OH} si el $\angle AOB = 2\alpha$?

- a) $2r \sec(\alpha)$
- b) $r \text{sen}(\alpha)$
- c) $r \cos(\alpha)$
- d) $2r \text{sen}(\alpha)$
- e) $2r \cos(\alpha)$

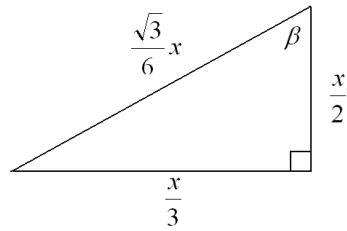


20. Para determinar la altura de un poste, Cristian se ha alejado 7 metros de su base y ha medido el ángulo que forma la visual al punto mas alto del poste, obteniendo un valor de 40° , si Cristian ignora su propia altura, ¿cuál es la altura del poste?

- a) $7 \cdot \tan(40^\circ)$
- b) $7 \cdot \cos(40^\circ)$
- c) $7 \cdot \text{cosec}(40^\circ)$
- d) $7 \cdot \cot(40^\circ)$
- e) Falta información.

21. Dada la siguiente figura, el valor del seno de β es:

- a) 13
- b) $\sqrt{3}/3$
- c) $6/\sqrt{3}$
- d) $\sqrt{3}$
- e) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$



22. ¿Cuál es el ancho del río según los datos de la figura?

- a) $\sqrt{3}/50$
- b) $\sqrt{3}$
- c) $2/\sqrt{3}$
- d) 50
- e) $50\sqrt{3}$

