Capítulo 14

Permutaciones, Arreglos y Combinaciones

Cuando estamos en presencia de un conjunto ordenado de una determinada manera, nos pueden venir las preguntas, ¿porque está ordenado de esa forma?, ¿existen más posibilidades para ordenar éste conjunto?, ¿cuantas?, etc…, el estudio de las permutaciones, de los areglos y de las combinaciones nos permitirá responder a éstas y otras preguntas.

14.1. Permutaciones

Las permutaciones consisten en cambiar el orden de un conjunto, y poder determinar cuantas posibilidades de ver de distinta forma ordenado el conjunto existen, por ejemplo; sea $\mathcal{M} = \{m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n\}$ un conjunto de n elementos, entonces las posibilidades que tengo para poner en cada casillero será: en la primera posición puedo colocar cualquiera de los n elementos, en la segunda puedo colocar cualquiera de los que me quedan (que son $n-1$), en la tercera posición puedo colocar solo $n-2$ elementos y así voy quedándome con un elemento menos a medida que avanzo en los casilleros, hasta que me quedo solo con un elemento en la última posición, es decir:

$$\mathcal{M} = \{\underbrace{\qquad}_{n \text{ opciones}}, \underbrace{\qquad}_{n-1 \text{ opciones}}, \underbrace{\qquad}_{n-2 \text{ opciones}}, \underbrace{\qquad}_{n-3 \text{ opciones}}, \underbrace{\qquad}_{n-4 \text{ opciones}}, \ldots\ldots, \underbrace{\qquad}_{2 \text{ opciones}}, \underbrace{\qquad}_{1 \text{ opción}}\}$$

De manera que cuando tengo un conjunto de n elementos la cantidad de permutaciones que puedo hacer sobre éste será:

$$\mathcal{P}_{n \text{ elementos}} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

A éste número lo conocemos como *factorial de n*, lo simbolizamos como $n!$, por lo tanto las permutaciones que puedo hacer sobre un conjunto de n elementos será:

$$\mathcal{P}_{n \text{ elementos}} = n!$$

♠ **Ejemplo**

Determinemos la cantidad de ordenamientos distintos del conjunto de las vocales $\mathcal{V}$={a, e, i, o, u}:

$$\mathcal{P}_{5 \text{ vocales}} = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ posibilidades distintas}$$

14.2. Arreglos

Los arreglos son todas las posibles ordenaciones de n elementos sacados de un grupo más grande de m elementos $(m > n)$, importando el orden de los conjuntos resultantes, de manera que $\{\alpha, \beta, \gamma\} \neq \{\beta, \gamma, \alpha\}$.

El número de arreglos de a n elementos que puedo hacer en un grupo de m elementos será:

$$\mathcal{A}_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$$

♠ **Ejemplo 1**

Determinemos la cantidad de arreglos de 2 vocales que podemos hacer en el conjunto de las vocales $\mathcal{V}$={a, e, i, o, u}:

Primero busquémoslos:

1.	{a, e}	6.	{e, i}	11.	{i, o}	16.	{o, u}
2.	{a, i}	7.	{e, o}	12.	{i, u}	17.	{u, a}
3.	{a, o}	8.	{e, u}	13.	{o, a}	18.	{u, e}
4.	{a, u}	9.	{i, a}	14.	{o, e}	19.	{u, i}
5.	{e, a}	10.	{i, e}	15.	{o, i}	20.	{u, o}

Existen 20 posibilidades, ahora veamoslo con la fórmula, donde m será la cantidad de vocales, y n la cantidad que habrá en los arreglos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_2^5 &= \frac{5!}{(5-2)!} \\
&= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} \\
&= 5 \cdot 4 \\
&= 20 \qquad \text{arreglos distintos}
\end{aligned}$$

♠ **Ejemplo 2**

Cuántos arreglos de a 3 elementos se pueden hacer de un conjunto de 6 elementos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_3^6 &= \frac{6!}{(6-3)!} \\
&= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} \\
&= 6 \cdot 5 \cdot 4 \\
&= 120 \qquad \text{arreglos distintos}
\end{aligned}$$

14.3. Combinaciones

Las combinaciones son muy parecidas a los arreglos, con la diferencia en que en los conjuntos que se forman no importa el orden de manera que $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{\beta, \gamma, \alpha\}$.

El número de combinaciones de a n elementos que puedo hacer de un total de m elementos será:

$$\mathcal{C}_n^m = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$$

♠ **Ejemplo**

Javier, Gonzalo, Manuel, Pamela y Paola se han postulado a la directiva de su curso, pero solo 3 de ellos pueden quedar, ¿cuántas directivas posibles hay?.

Respuesta

En éste caso se trata de formar combinaciones entre los postulantes, pues si por ejemplo se elije a Javier, Gonzalo y Paola es lo mismo que se elija a Paola, Gonzalo y a Javier, lo que corresponde a una combinación de 3 elementos de un total de 5, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_3^5 &= \frac{5!}{3!(5-3)!} \\
&= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} \\
&= \frac{5 \cdot 4}{2} \\
&= 10 \qquad \text{posibles directivas distintas}
\end{aligned}$$

♣ **Actividad**

Responde las siguientes preguntas

1. *Un pastelero dispone de 7 ingredientes para armar sus tortas, ¿cuantas tortas distintas de 3 ingredientes (sin que se repitan los ingredientes), podría hacer?.*
2. *De cuantas formas distintas puedes ordenar tu repisa de 8 libros.*
3. *¿Cuantas palabras distintas se pueden formar con la palabra matemática (no importa que no signifique nada)?*
4. *Si un presidente dispone de 10 políticos para designar a sus 7 senadores, ¿cuántos posibles senados pueden haber?,*

Capítulo 15

Interés

En nuestra vida cotidiana estamos continuamente enfrentándonos a la palabra interés, principalmente a través de promociones que nos ofrecen los bancos para que depositemos nuestros ahorros, o a través de los prestamos con interés, antiguamente conocidos como usura[1] , la forma que como funciones el interés es aumentando una cantidad (denominada *capital inicial*) al cabo de un periodo en un cierto porcentaje.

El capital inicial lo representaremos como c_i, al interés (expresado siempre en forma decimal) como i, al capital final como c_f y a la cantidad de períodos transcurridos como t.

Existen dos formas básicas de intereses, el simple y el compuesto.

Versión 1.0, Febrero de 2008

15.1. Interés Simple

El interés es simple si la ganancia provocada por el capital inicial se percibe después de pasados períodos iguales de tiempo, sin que el capital varíe en el proceso.

15.1.1. Deducción de la fórmula del interés simple

Como ya sabemos i representa un determinado interés, llamemos G a la ganáncia producida despues de t periodos, si definimos a $i = r\,\%$ anual entonces c_i producirá al cabo de un año una ganancia de $c_i \cdot r\,\%$, por lo tanto c_i prodrucirá pasados t años una ganancia de $t \cdot c_i \cdot r\,\%$. por lo tanto:

$$G_t = t \cdot c_i \cdot r\,\% = \frac{t \cdot c_i \cdot r}{100}$$

Si el tiempo está dado en meses entonces debemos transformarlos a años, pues el interés es anual, si está en días, entonces se convierte en meses y luego en años, lo que importa es que el tipo de interés coincida con el período.

Las formas de convertir de un tipo de dato a otro son:

$$\begin{aligned} t_{\text{años}} &= \frac{t_{\text{meses}}}{12} \\ t_{\text{meses}} &= \frac{t_{\text{días}}}{30} \end{aligned}$$

[1] La usura tiene sus origenes conocidos remotamente desde la edad media entre los prestamistas y los antiguos comerciantes.

15.1.2. Resolución de ejercicios con interés simple

Veamos algunos ejemplos :

♠ **Ejemplo 1**

Si deposito un capital inicial de \$500, ¿cual será la ganancia obtenida al cabo de 4 años si se tiene un interés anual del 5 %?

Respuesta

Aplicamos la fórmula, pues $c_i = \$500$, $i = 5\,\%$ anual y $t = 4$:

$$G_4 = 4 \cdot \$500 \cdot 5\,\% = \frac{4 \cdot \$500 \cdot 5}{100} = \$100$$

Por lo tanto al cabo de cuatro años obtendré una ganancia de \$100.

♠ **Ejemplo 2**

Si pido un préstamo de \$900, ¿cuánto será lo que deberé cancelar una vez pasados 40 meses si me dicen que me cobrarán un interés anual del 10 %?

Respuesta

Determinemos los datos $c_i = \$900$, $i = 10\,\%$ anual y $t = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}$, pues el interes es del tipo anual, entonces:

$$G_t = \frac{10}{3} \cdot \$900 \cdot 10\,\% = \frac{10 \cdot \$900 \cdot 10}{300} = \$300$$

Por lo tanto al cabo de 40 meses deberé cancelar $\$900 + \$300 = \$1.200$.

♣ **Actividad**

Calcula las siguientes ganancias por medio del interés simple:

1. *Hallar la ganancia proporcionada por \$5.000 con un interés anual del 5 % en 8 meses.*
2. *Hallar la ganancia proporcionada por \$10.000 con un interés mensual del 1 % en un años.*
3. *Hallar la ganancia proporcionada por \$1.500 con un interés semanal del 10 % en 3 días.*
4. *Hallar el capital final proporcionado por uno inical de \$1.000 con un interés anual del $5\frac{1}{2}\,\%$ en 50 meses.*
5. *Hallar la ganancia proporcionada por \$1.000.000 con un interés mensual del 1 % en 360 semanas.*
6. *Hallar el capital final proporcionado por uno inical de \$100 con un interés mensual del 10 % en 5 años.*

15.2. Interés Compuesto

Un interés es compuesto cuando las ganancias se suman al capital después de cada período, aumentándo a éste y a la ganancia que se sumará al próximo periodo pues ésta es un porcentaje del nuevo capital.

Éste es el tipo de interés que se ocupa usualmente pues a mayor tiempo trae mayores ganáncias que el interés simple.

Existen dos formas de calcular el interés compuesto, la primera es calcular la ganancia en un solo periodo con un interés simple, luego sumamos esta ganancia al capital inicial y formamos un nuevo capital, posteriormente realizamos el mismo proceso en un segundo periodo al nuevo capital, sumamos la nueva ganancia obtenida y volvemos a realizar el mismo proceso tantas veces como lo exija el problema.

La segunda manera de calcular el interés compuesto es ocupando la fórmula que a continuación veremos:

15.2.1. Deducción de la fórmula de interés compuesto

Primero calculemos el capital despues de un periodo (lo encontramos sumando al capital inicial la ganancia de un periodo).

$$\begin{aligned} c_1 &= c_i + c_i \cdot i \\ &= c_i(1+i) \end{aligned} \tag{15.1}$$

Ahora éste nuevo capital (c_1), considerémoslo como un capital inicial para calcular nuevamente en el segundo periodo:

$$\begin{aligned} c_2 &= c_1 + c_1 \cdot i \\ &= (c_i(1+i)) + (c_i(1+i)) \cdot i \\ &= c_i + c_i i + c_i i + c_i i^2 \\ &= c_i + 2c_i i + c_i i^2 \\ &= c_i(1+2i+i^2) \\ &= c_i(1+i)^2 \end{aligned} \tag{15.2}$$

Ahora consideremos c_2 como el capital inicial para el tercer período:

$$\begin{aligned} c_3 &= c_2 + c_2 \cdot i \\ &= (c_i(1+i)^2) + (c_i(1+i)^2) \cdot i \\ &= c_i + 2c_i i + c_i i^2 + c_i i + 2c_i i^2 + c_i i^3 \\ &= c_i(1+2i+i^2+i+2i^2+i^3) \\ &= c_i(1+3i+3i^2+i^3) \\ &= c_i(1+i)^3 \end{aligned} \tag{15.3}$$

Así, observando las ecuaciones (15.1), (15.2) y (15.3) podemos concluir que despues de pasados n periodos el capital final será de:

$$\boxed{c_n = c_i(1+i)^n}$$

15.2.2. Resolución de ejercicios de interés compuesto

Veamos algunos ejemplos :

♠ **Ejemplo 1**

Si deposito en el banco un capital inicial de \$100.000, ¿cuál será mi ganáncia al cabo de 10 años si téngo un interés del 2 % mensual?

Respuesta

En éste caso el interés es mensual por lo tanto los periodos deben ser medidos en meses, lo que implica un total de $10 \cdot 12 = 120$ periodos en total, ahora reconozcamos los datos; $c_i = \$100.000$, $i = 2\,\%$ mensual y $t = 120$:

$$
\begin{aligned}
c_f &= \$100.000 \cdot (1 + 0{,}02)^{120} \\
&= \$100.000 \cdot (1{,}02)^{120} \\
&= \$100.000 \cdot 10{,}76516 \\
&= \$1.076.516
\end{aligned}
$$

Por lo tanto al cabo de 10 años obtendré una ganancia de \$1.076.516−\$100.000=\$976.516.

♠ **Ejemplo 2**

Al pedir un péstamo a 20 años de \$1.000.000, el banco me ofrece una tasa de interés mensual de un 1 %, ¿una vez terminado este periodo, cuánto dinero habre pagado por concepto de aquel préstamo?

Respuesta

Determinemos los datos $c_i = \$1.000.000$, $i = 1\,\%$ mensual y $t = 20 \cdot 12 = 240$ meses, entonces:

$$
\begin{aligned}
c_f &= \$1.000.000 \cdot (1 + 0{,}01)^{240} \\
&= \$1.000.000 \cdot (1{,}01)^{240} \\
&= \$1.000.000 \cdot 10{,}892553 \\
&= \$10.892.553
\end{aligned}
$$

Por lo tanto al cabo de 20 años habré cancelado \$10.892.553.

♣ *Actividad*

Responde las siguientes preguntas (para algunos ejercicios es necesario utilizar calculadora):

1. *¿En cuanto se convertirán \$1.000 al* $1\frac{2}{3}\,\%$ *anual en 12 meses?.*
2. *¿En cuanto se convertirán \$150 al* $\frac{10}{4}\,\%$ *anual en 2 años?.*
3. *¿Cual fue el interés mensual ocupado si a una persona que depositó hace un años 8 meses \$10.000, hoy tiene un capital de \$15.000?.*
4. *¿En cuánto tiempo una persona que deposita \$1.000, logrará tener \$1.100 si lo hace en un banco que le entrega un interés mensial del 10 %?*
5. *¿Que ganancia provocarán \$500 depositados a un interés semanal de un 50 % en un año?*