Capítulo 4

Desarrollo Algebraico

En el presente capítulo aprenderás técnicas para "simplificar" expresiones algebraicas, reduciendo la mayor cantidad de términos de cada expresión para lograr una apariencia mas agradable y breve, esto es lo que conocemos como factorización y reducción de las expresiones algebraicas.

Existen muchos métodos distintos para lograr estos objetivos, pero sin duda que para todos ellos te será de mucha utilidad conocer los llamados Productos Notables, que nos permitirán simplificar enormemente nuestro trabajo.

4.1. Productos Notables

Estos son productos que cumplen con ciertas reglas, que nos permiten hacer más fluido nuestros cálculos.

4.1.1. Cuadrado de Binomio

Es el 1^{er} término al cuadrado (+) ó (−) el doble producto del 1^{ero} por el 2^{do} (+) el 2^{do} término al cuadrado.

$$\boxed{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2}$$

4.1.2. Suma por su Diferencia

Es el 1^{er} término al cuadrado (−) el segundo término la cuadrado.

$$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$

4.1.3. Cubo de Binomio

Es el 1^{er} término al cubo (+) ó (−) el triple producto del 1^{ero} al cuadrado por el segundo (+) el triple producto del 1^{ero} por el 2^{do} al cuadrado (+) ó (−) el 2^{do} término al cubo.

$$\boxed{(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3}$$

4.1.4. Multiplicación de binomios con un término en común

Es el término en común al cuadrado más (+) la suma de los término distintos por el término en común más (+) el producto entre los términos distintos.

$$\boxed{(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab}$$

♣ *Actividad*

Resuelve los siguientes productos notables:

1.	$(5+x)^2$	*8.*	$(x^{a+1} - 3x^{a-2})^2$	*15.*	$(1-3y)^3$
2.	$(a^2x + by^2)^2$	*9.*	$(1-3ax)(3ax+1)$	*16.*	$(a^2-2b)^3$
3.	$(3a^4 - 5b^2)^2$	*10.*	$(6x^2 - m^2x)(6x^2 + m^2x)$	*17.*	$(4n+3)^3$
4.	$(8x^2y + 9m^3)^2$	*11.*	$(3x^a - 5y^m)(5y^m + 3x^a)$	*18.*	$(2x+3y)^3$
5.	$(x^5 - 3ay^2)^2$	*12.*	$(x^2+a^2)(x^2-a^2)$	*19.*	$(1-a^2)^3$
6.	$(x^{a+1} + y^{x-2})^2$	*13.*	$(a^{x+1} - 2b^{x-1})(2b^{x-1} + a^{x+1})$	*20.*	$(2x-3y^3)^3$
7.	$(a^{x-2} - 5)^2$	*14.*	$(2x+1)^3$		

4.1.5. Binomio a una Potencia Natural

Corresponde a la manera de generalizar el cuadrado de binomio, el cubo de binomio, binomio a la cuarta, etc. A un binomio a la n, donde n es un número natural.

$$\boxed{(x \pm y)^n = a_0x^n \pm a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 \pm a_3x^{n-3}y^3 + \cdots a_ny^n}$$

En la fórmula anterior existe una relación interesante de conocer en cada uno de sus términos, notemos que en el primer término aparece x^n, en el segundo x^{n-1} en el tercero x^{x-2}, ... en el $m-$ésimo $x^{n-(m-1)}$, es decir x va disminuyendo su potencia partiendo desde n hasta llegar a 0 en el último término[1], en el caso de y ocurre absolutamente lo contrario, la potencia parte de 0 en el primer término hasta llegar a n en el último. De ésta manera obtendremos fácilmente los coeficientes literales de ésta expresión, sin embargo los coeficientes $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ vienen determinados por una estructura conocida como el *Triángulo de Pascal*, que vemos a continuación:

Triángulo de Pascal

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
n=0 & \rightarrow & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1 & \rightarrow & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2 & \rightarrow & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=3 & \rightarrow & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=4 & \rightarrow & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5 & \rightarrow & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n=6 & \rightarrow & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

La manera de obtener éste triángulo es partir de las dos primeras filas, y de ahí en adelante sumar hacia abajo los coeficientes para obtener la fila que continúa. Observa que en la tercera

[1] Observa que la cantidad de términos que resultan de la expresión $(a+b)^n$ es $n+1$.

y la cuarta fila aparecen los coeficientes del cuadrado y del cubo de binomio respectivamente, cuando $n = 2$ y $n = 3$.

De ésta manera podemos obtener (conociendo la fila que corresponde en el triángulo de Pascal), cualquier potencia de un binomio.

♠ Ejemplo 1:

Encontremos la expresión expandida de $(a + b)^5$.

Respuesta; los coeficientes que le corresponden son los de la sexta fila del triángulo de Pascal, pues $n = 5$, entonces el primer paso es:

$$(a + b)^5 = 1\_\_\_ + 5\_\_\_ + 10\_\_\_ + 10\_\_\_ + 5\_\_\_ + 1\_\_\_$$

Ahora ponemos los término a y b con las potencias respectivas.

$$\begin{aligned}(a + b)^5 &= 1 \cdot a^5 \cdot b^0 + 5 \cdot a^4 \cdot b^1 + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a^1 \cdot b^4 + 1 \cdot a^0 \cdot b^5 \\ &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\end{aligned}$$

♠ Ejemplo 2:

Encontremos la expresión expandida de $(2x - 3)^4$

Respuesta: los coeficientes que le corresponden son los de la quinta fila del triángulo de Pascal, pues $n = 4$, entonces el primer paso es:

$$(2x - 3)^4 = 1\_\_\_ - 4\_\_\_ + 6\_\_\_ - 4\_\_\_ + 1\_\_\_$$

Ahora ponemos los término $2x$ y 3 con las potencias respectivas.

$$\begin{aligned}(2x - 3)^4 &= 1 \cdot (2x)^4 \cdot 3^0 - 4 \cdot (2x)^3 \cdot 3^1 + 6 \cdot (2x)^2 \cdot 3^2 - 4 \cdot (2x)^1 \cdot 3^3 + 1 \cdot (2x)^0 \cdot 3^4 \\ &= 64x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81\end{aligned}$$

4.2. Factorización

Al factorizar buscamos dos o más factores cuyo producto sea igual a la expresión que queremos obtener.

No todos los polinomios se pueden factorizar, ya que hay algunos que solo son divisibles por si mismo y por 1, como por ejemplo: $x + y$. Pero hay que tener ojo ya que este polinomio no es divisible en los reales $\mathbb{R}$ (que es donde estamos trabajando), esto no significa que no se pueda factorizar en otro conjunto numérico mayor, por ejemplo $x + y$ si se puede factorizar en los complejos $\mathbb{C}$, quedando: $(\sqrt{x} + \sqrt{y}i)(\sqrt{x} - \sqrt{y}i)$.

Por ahora solo trabajaremos en los reales $\mathbb{R}$.

4.2.1. Factor Común

Factor Común de un Monomio

♠ Ejemplos:

- $5x + 25x^2y = 5x(1 + 5xy)$
- $18mxy^2 - 54m^2x^2y^2 + 36my^2 = 18my^2(x - 3mx^2 + 2)$

Factor Común de un Polinomio

♠ Ejemplos:

- $x(a+b)+m(a+b)=(x+m)(a+b)$
- $2x(a-1)-y(a-1)=(2x-y)(a-1)$
- $a(x+1)-x-1=a(x+1)-(x+1)=(a-1)(x+1)$

Factor Común por Agrupación de Términos

♠ Ejemplos:

- $ax+bx+ay+by=(ax+bx)+(ay+by)=x(a+b)+y(a+b)=(x+y)(a+b)$
- $2x^2-3xy-4x+6y=(2x^2-3xy)-(4x-6y)=x(2x-3y)-2(2x-3y)=(x-2)(2x-3y)$
- $a^2x-ax^2-2a^y+2axy+x^3-2x^2y=(a^2x-ax^2+x^3)-(2a^2y-2axy+2x^2y)=$ $x(a^2-ax+x^2)-2y(a^2-ax+x^2)=(a^2-ax+x^2)(x-2y)$

4.2.2. Factorización de Trinomios

Trinomio Cuadrado Perfecto

Para factorizar un trinomio cuadrado perfecto, primero tenemos que ordenar el trinomio dejando a los extremos los cuadrados perfectos.

Por ejemplo:

$$2m+m^2+1 \quad = \quad m^2+2m+1$$

Luego extraemos la raíz cuadrada a los cuadrados perfectos.
de m^2 es m y de 1 es 1 obteniendo:

$$(m+1)(m+1) \quad = \quad (m+1)^2$$

Trinomio de la forma x^2+bx+c

Tomemos el trinomio $x^2-7x+12$ el cual ya está ordenado, entonces escribiremos:

$$x^2-7x+12 \quad = \quad (x \qquad)(x \qquad)$$

Luego nos preguntamos que números sumados me dan -7 y a la vez multiplicados me den 12, estos números son -3 y -4, estos los colocamos en los paréntesis.

$$x^2-7x+12 \quad = \quad (x-3)(x-4)$$

Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Tomemos el trinomio $6x^2 - 7x - 3$, ya ordenado amplificaremos por el coeficiente que acompaña a x^2, que en este caso es 6 quedando:

$$(6x^2 - 7x - 3) \cdot 6 \quad = \quad (6x)^2 - 7(6x) - 18$$

Ahora buscamos dos números que multiplicados den -18 y sumados -7, estos son -9 y 2. Como anteriormente amplificamos la expresión por 6 ahora hay que dividir por 6.

$$\begin{aligned}
6x^2 - 7x - 3 &= \frac{(6x)^2 - 7(6x) - 18}{6} \\
&= \frac{36x^2 - 7(6x) - 18}{6} \\
&= \frac{(6x \qquad)(6x \qquad)}{6} \\
&= \frac{(6x - 9)(6x + 2)}{6} \\
&= \frac{3(2x - 3)2(3x + 1)}{6} \\
&= \frac{6(2x - 3)(3x + 1)}{6} \\
&= (2x - 3)(3x + 1)
\end{aligned}$$

4.2.3. Factorización de Cubos

Cubo perfecto de Binomio

Tenemos que ordenar la expresión con respecto a una letra. Y debe cumplir con las siguientes condiciones:

1. Debe tener cuatro términos
2. El 1^{ero} y el último término deben ser cubos perfectos
3. El 2^{do} sea más o menos el triple del 1^{ero} al cuadrado por el 2^{do}.
4. Y que el 3^{er} término sea el triple del 1^{ero} por el 2^{do} al cuadrado.

Tomemos $-27 + 27x - 9x^2 + x^3$ ordenado queda: $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$ Tiene cuatro términos, la raíz cúbica de x^3 es x y la de -27 es -3, además $3 \cdot x^2 \cdot -3$ es el 2^{do} término y $3 \cdot x \cdot (x)^2$ el 3^{ero}.

Suma o Diferencia de Cubos Perfectos

$$a^3 + b^3 \quad = \quad (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 \quad = \quad (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

4.2.4. Diferencia de Cuadrados Perfectos

Tenemos que extraer la raíz cuadrada a los dos términos y luego multiplicamos la diferencia de las raíces con la suma de estas.

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Ya que la raíz de a^2 es a y la de b^2 es b.

4.2.5. Completación de Cuadrados de Binomio

Tomemos $y^2 - 8y + 15$.

Digamos que y^2 y $-8y$ son parte de un cuadrado perfecto.

Luego nos faltaría el último término que es el cuadrado de la mitad del coeficiente que acompaña a x, que es 16.

Sumemos y restemos este último término.

Arreglando los términos convenientemente llegamos a la diferencia de dos cuadrados perfecto.

Y aplicamos desde luego suma por su diferencia.

$$\begin{aligned}
y^2 - 8y + 15 &= y^2 - 8y + 15 - 16 + 16 \\
&= (y^2 - 8y + 16) + (15 - 16) \\
&= (y-4)^2 - 1 \\
&= (y-4-1)(y-4+1) \\
&= (y-5)(y-3)
\end{aligned}$$

De manera más general:

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx &= 0 \\
\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x &= 0 \\
x^2 + \frac{b}{a}x + 0 &= 0 \\
\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}}_{\text{Un cuadrado perfecto}} - \frac{b^2}{4a^2} &= 0 \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2}
\end{aligned}$$

◇ **Observa que...**

Para comprobar si la factorización que hicimos esta correcta tenemos que aplicar el axioma de distributividad. véase página 7

$\clubsuit$ **Actividad**

Factoriza utilizando cualesquier método, si se puede simplifica:

1. $16x^3y^2 - 8x^2y - 24x^4y^2 - 40x^2y^3$
2. $2a^2x + 2ax^2 - 3ax$
3. $4x(m-n) + n - m$
4. $(x+y)(n+1) - 3(n+1)$
5. $x(a+2) - a - 2 + 3(a+2)$
6. $6m - 9n + 21nx - 14mx$
7. $n^2x - 5a^2y^2 - n^2y^2 + 5a^2x$
8. $a^3 + a^2 + a + 1$
9. $20ax - 5bx - 2by + 8ay$
10. $36 + 12m^2 + m^4$
11. $\frac{a^2}{4} - ab + b^2$
12. $16x^6 - 2x^3y^2 + \frac{y^4}{16}$
13. $196x^2y^4 - 289b^4m^{1}0$
14. $\frac{x^6}{49} - \frac{4a^{1}0}{121}$
15. $a^{2n} - b^{2n}$
16. $64m^2 - (m-2n)^2$
17. $36(m+n)^2 - 121(m-n)^2$
18. $25 - x^2 - 16y^2 + 8xy$
19. $1 - a62 - 9n^2 - 6an$
20. $28 + a^2 - 11a$
21. $x^2 - 7x - 30$
22. $m^2 - 20m - 300$
23. $x^4 + 7ax^2 - 60a^2$
24. $8a^2 - 14a - 15$
25. $m - 6 + 15m^2$
26. $20x^2y^2 + 9xy - 20$
27. $125a^3 + 150a^2b + 60ab^2 + 8b^3$
28. $27a^3 - b^3$
29. $x^2 - 12x + 11$
30. $y^2 + 16y + 20$

4.3. Mini Ensayo IV Factorización

1. Al simplificar la expresión

$$(x^{2k} - y^{2k}) \div \frac{x^{k+1} - xy^k}{y^{k+1} + x^ky}$$

Resulta:

a) $\frac{y^2(x^k+y^k)}{x}$
b) $\frac{(x^k+y^k)^2}{xy^2}$
c) $\frac{x}{y}(x^k+y^k)^2$
d) $\frac{xy}{(x^k+y^k)}$
e) Ninguna de las anteriores.

2. $a^2 - 4b^2 =$

a) $a + 2b$
b) $a - 2b$
c) $(a-2b)(a+2b)$
d) $(2b-a)(2b+a)$
e) Ninguna de las anteriores.

3. ¿Cuál(es) de los siguientes términos se puede(n) agregar a la expresión $4x^2 + 1$ para completar el desarrollo del cuadrado de binomio?

I. $-4x^2$
II. $4x$
III. $4x^2$

a) Solo I

b) Solo II
c) Solo III
d) I y III
e) II y III

4. En la expresión algebraica $(y-5)(y^5-8)(y-3)$ el término libre (sin factor literal), es:

   a) -120
   b) 0
   c) 16
   d) 80
   e) 120

5. El grado de la expresión $5x^3y^4z$ es:

   a) 3
   b) 4
   c) 5
   d) 7
   e) 8

6. El producto entre la suma del cuadrado de a y el cubo de b y su diferencia es:

   a) a^4
   b) $2a^4-2b^6$
   c) a^4-b^9
   d) a^4-b^6
   e) $2a^2-2b^9$

7. Al dividir (x^2-y^2) por $(x+y)(x-y)$ se obtiene:

   a) 0
   b) $\frac{x-y}{x+y}$
   c) $\frac{x+y}{x-y}$
   d) $\frac{1}{x+y}$
   e) 1

8. ¿Cuál es el área de un rectángulo de lados $(m+n)$ y $(m-n)$?

   a) $m^2+2mn+n^2$
   b) m^2+n^2
   c) m^2-n^2
   d) $m^2-2mn+n^2$
   e) nm^2+mn^2

9. La expresión equivalente a $(3m-5p)^2$ es:

   a) $6m^2-10p^2$
   b) $9m^2-25p^2$
   c) $6m^2-15mp+25p^2$
   d) $9m^2-30mp-25p^2$
   e) $9m^2-30mp+25p^2$

10. $\frac{a^6b^{-15}}{a^{-2}b^{-5}}=$

   a) $-\frac{9}{7}$
   b) a^8b^{-10}
   c) a^4b^{-20}
   d) $a^{-3}b^3$
   e) -9

11. El cuociente entre $(5^{2n+1}-25^n)$ y 5^{2n+2} es:

   a) $1/5$
   b) 5
   c) $25/4$
   d) $(2/5)^2$
   e) 5^{1-4n}

12. Si $x^2+y^2=36$ y $xy=32$ entonces el valor de $(x+y)$ es:

   a) -1
   b) 0
   c) 1
   d) 10
   e) 32

13. Si la cuarta parte del área de un cuadrado es $\frac{1}{4}x^2+x+1$, entonces el doble de su perímetro es:

   a) $x+2$
   b) $(x+2)^2$
   c) $4x+8$
   d) $2x+4$
   e) $8x+16$

14. El área de un cuadrado de lado $(2-x)$ es:

   a) $8-4x$
   b) $4-4x+x^2$
   c) $4+x^2$
   d) $4-2x$
   e) $4+4x+x^2$