

Capítulo 5

Ecuaciones Algebraicas

Muchos de los problemas que nos acontecen en la vida diaria, basan su solución en el conocimiento de distintos factores que lo involucran, como por ejemplo, es necesario conocer la distancia y el tiempo del que dispongo para llegar a algún lugar para determinar la velocidad a la que necesitare ir. Por lo tanto se hace muy importante buscar formas de obtener valores que nos son desconocidos, y sin duda, la forma más exacta de encontrarlos es lograr interpretarlos matemáticamente en algo que denominamos **ecuación**.

En el capítulo anterior aprendiste a interpretar el lenguaje hablado como lenguaje matemático, en éste capítulo aprenderás como aprovechar ese conocimiento para formar ecuaciones y poder resolverlas.

5.1. Conceptos Básicos

Ecuación : Las ecuaciones son expresiones algebraicas formadas por dos miembros separados de una igualdad ($=$). Uno o ambos de éstas partes debe tener a lo menos una variable conocida como *incógnita*.

Las ecuaciones se satisfacen sólo para determinados valores de la o las incógnitas, los cuales son conocidos como *soluciones o raíces de la ecuación*.

Ecuación Algebraica : Es aquella ecuación en que ambos miembros son polinomios.

Identidad : Las identidades son expresiones similares a las ecuaciones, pero la igualdad entre los miembros que la componen es válida para cualquier valor de la incógnita, por ejemplo $x^2 = x \cdot x$ se cumple para cualquier valor de x , por lo tanto ésta sería una identidad. A diferencia $x + 1 = 2$ es válida sólo si $x = 1$, por lo tanto ésta sería una ecuación.

Solución o Raíz : Es el valor real para el que una ecuación tiene sentido, es decir, es el valor que necesita ser la incógnita para que la ecuación se transforme en una identidad.

5.2. Ecuación de primer grado

Las ecuaciones de primer grado son aquellas en las cuales la o las variables presentes están elevadas a 1 (por esta razón se llaman de primer grado), veamos como podemos resolver éstas ecuaciones.

5.2.1. Resolución de ecuaciones de primer grado

Empecemos viendo algunas reglas que nos servirán para la resolución de ecuaciones:

- 1^{era} A toda igualdad se le puede agregar o quitar una cantidad sin alterarla, siempre que se haga sobre ambos lados de dicha igualdad. Por ejemplo; todos sabemos que $2 = 1 + 1$, si agregamos una unidad a cada lado de la igualdad obtenemos $2 + 1 = 1 + 1 + 1$ lo que implica que $3 = 1 + 1 + 1$ que también resulta ser verdadero.
- 2^{da} Toda igualdad puede ser multiplicada y/o dividida en ambos lados por cualquier número real distinto de 0 manteniendose la igualdad inalterable.
- 3^{era} Toda ecuación de primer grado con una variable se puede escribir de la forma $ax + b = 0$, y es de los valores de a y b de los cuales depende la cantidad de soluciones que vamos a tener.
- Si $a \neq 0$, entonces existe una única solución.
 - Si $a = 0$ y $b = 0$, existen infinitas soluciones.
 - Si $a = 0$ y $b \neq 0$, no existen soluciones.

Ahora, veamos el método básico de resolución con un ejemplo.

Ejemplo :

$$\begin{array}{llll} 5x + 7 & = & 21 - 9x & \rightarrow \text{Ocupando la primera regla podemos sumar a} \\ & & & \text{ambos lados el número } 9x. \\ 5x + 7 + 9x & = & 21 - 9x + 9x & \rightarrow \text{Como } -9x \text{ es el inverso aditivo de } 9x \text{ implica} \\ & & & \text{que } 9x - 9x = 0. \\ 5x + 9x + 7 & = & 21 + 0 & \rightarrow \text{Ahora podemos sumar } -7 \text{ a ambos lados.} \\ 14x + 7 - 7 & = & 21 - 7 & \\ 14x + 0 & = & 14 & \rightarrow \text{Luego ocupando la segunda regla podemos divi-} \\ & & & \text{dir a ambos lados por } 14 \text{ obteniendo.} \\ 14x \div 14 & = & 14 \div 14 & \rightarrow \text{Al lado izquierdo podemos conmutar.} \\ x \cdot 14 \div 14 & = & 1 & \rightarrow \text{Obteniendo finalmente.} \\ x \cdot 1 & = & 1 & \\ x & = & 1 & \end{array}$$

Como puedes ver la idea de éste método es juntar todos los términos algebraicos que tengan la incógnita a un solo lado de la igualdad para luego “despejarlo” sumando los inversos aditivos de los otros términos, una vez que queda el término con la incógnita solo a un lado de la ecuación multiplicamos por el inverso multiplicativo de su factor numeral. De ésta forma siempre llegaremos a la solución.

5.2.2. Redacción de ecuaciones de primer grado

Muchos de los problemas que te aparecerán en la PSU no están escritos matemáticamente, así es que es muy importante que aprendas como transformarlo a una simple ecuación.

Recuerda cuando aprendiste lenguaje algebraico¹, porque te será muy útil.

¹Véase página 36

Ejemplo :

♠ ¿Qué número es aquel que al duplicar su sucesor es igual al triple de su antecesor?.

Respuesta :

El doble del sucesor de un número se representa por $2 \cdot (x + 1)$, y el triple del antecesor como $3 \cdot (x - 1)$, por lo tanto la ecuación que da de la forma:

$$2(x + 1) = 3(x - 1)$$

Luego lo resolvemos como ya sabemos hacerlo:

$$\begin{aligned} 2(x + 1) &= 3(x - 1) \\ 2x + 2 &= 3x - 3 \\ 2 + 3 &= 3x - 2x \\ 5 &= x \end{aligned}$$

Otro ejemplo :

♠ Gonzalo tiene \$900 más que Cristian. Si entre ambos tienen un total de \$5.500, ¿cuánto dinero tiene Cristian?

Respuesta :

El dinero de Cristian es nuestra incógnita, así es que llamémosla $\$x$, por lo tanto Gonzalo debe tener $(\$x + \$900)$ ya que éste tiene \$900 más. Como entre ambos suman \$5.500 la ecuación queda de la forma:

$$\$x + (\$x + \$900) = \$5.500$$

Al resolverla queda:

$$\begin{aligned} \$x + (\$x + \$900) &= \$5.500 \\ \$x + \$x + \$900 &= \$5.500 \\ \$2x + \$900 &= \$5.500 \\ \$2x &= \$5.500 - \$900 \\ \$2x &= \$4.600 \\ \$x &= \frac{\$4.600}{2} \\ \$x &= \$2.300 \end{aligned}$$



Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado

1. $x + 2 = 5$
 2. $5 - x = 10$
 3. $2x + 4 = 7$
 4. $4x + 1 = 2$
 5. $5x + 6 = 10x + 5$
 6. $21 - 6x = 27 - 8x$
 7. $8x - 4 + 3x = 8x + 14$
 8. $5x + 20 = 10x + 2$
 9. $11 + 8x = 10x - 3$
 10. $\frac{x+2}{5} = 2$
 11. $(x + 2) - (-x - 3) = x$
 12. $-(x + 1 - (2x + 5)) = x$
 13. $-((x + 5) + 5x + 2) = (8x + 6)$
 14. $\frac{x+5}{8} = \frac{x-9}{5}$
 15. $x - (2x + 1) = 8 - (3x + 3)$
 16. $15x - 10 = 6x - (x + 2) + (-x + 3)$
 17. $(5 - x) - (6 - 4x) = 8x - (3x - 17)$
 18. $30x - (6 - x) + (4 - 5x) = -(5x + 6)$
 19. $x + 3(x - 1) = 6 - 4(2x + 3)$
 20. $6(x - 1) + 16(2x + 3) = 3(2x - 7)$
 21. $\frac{x}{2} + 1 = 2$
 22. $(5 - 3x) - (-4x + 6) = 5x + 17$
 23. $x - (5x + 1) = -3x + (-x + 2)$
 24. $14x - (3x + 2) - 10 = 10x - 1$
 25. $5x + -x - (x + 5) = 1$
 26. $\frac{x+2}{4} = \frac{2-x}{8} + 1$
 27. $\frac{x}{10} = \frac{x}{2} + 1$
 28. $5x = \frac{8x-15}{3}$
 29. $\frac{x+2}{x-6} = -1$
 30. $\frac{(x+5)-(-3x+2x)}{5x} = -5 + 2$
 31. $2(3x + 3) - 4(5x - 3) = x(x - 3) - x(x + 5)$
 32. $184 - 7(2x + 5) = 301 + 6(x - 1) - 6$
 33. $7(18 - x) = 6(3 - 5x) - (7x + 21) - 3(2x + 5)$
 34. $-3(2x + 7) + (6 - 5x) - 8(1 - 2x) = (x - 3)$
 35. $(3x - 4)(4x - 3) = (6x - 4)(2x - 5)$
 36. $(4 - 5x)(4x - 5) = (10x - 3)(7 - 2x)$
 37. $(x - 2)^2 - (3 - x)^2 = 1$
 38. $14 - (5x - 1)(2x + 3) = 17 - (10x + 1)(x - 6)$
 39. $7(x - 4)^2 - 3(x + 5)^2 + 2 = 4(x + 1)(x - 1)$
 40. $(x + 1)^3 - (x - 1)^3 = 6x(x - 3)$
-
-

5.3. Ecuación de segundo grado

Una ecuación de segundo grado es una igualdad donde el máximo exponente de la variable es 2, pudiendo aparecer términos con la variable elevada a 1 e incluso términos independientes (sin la variable).

La ecuación cuadrática se puede presentar de diferentes maneras, que vale la pena estudiar, para poder hacer una más rápida resolución de ellas.

5.3.1. Ecuación incompleta total

Es una ecuación de la forma:

$$ax^2 + c = 0$$

siendo a y c constantes, con $a \neq 0$. Para este caso de ecuaciones la resolución es siempre de la forma:

$$\begin{aligned} ax^2 + c &= 0 \\ ax^2 &= -c \\ x^2 &= -\frac{c}{a} \\ x &= \sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{o también} \quad x = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \end{aligned}$$

lo que representamos por

$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

◇

Observa que...

La cantidad subradical de esta solución puede ser negativa o positiva, lo que nos conduce a determinar la naturaleza de las raíces o soluciones de la ecuación. Estas pueden ser números reales si $-\frac{c}{a} \geq 0$, o complejas² si $-\frac{c}{a} < 0$.

2

5.3.2. Ecuación incompleta binomial

Se trata de una expresión que posee dos términos que poseen la variable, es de la forma:

$$ax^2 + bx = 0$$

Siendo a y b constantes, con $a \neq 0$. Podemos observar que como la variable se encuentra en los dos términos algebraicos podemos factorizar por ella, obteniendo:

$$x \cdot (ax^2 + b) = 0$$

Ahora, tenemos dos número reales (x y $ax + b$), que multiplicados entre si, dan por resultado 0. Lo que quiere decir que al menos uno es 0, por lo tanto obtenemos dos soluciones:

$$x_1 = 0 \quad \text{o} \quad \begin{aligned} ax_2 + b &= 0 \\ x_2 &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

5.3.3. Ecuación general

La forma general de la ecuación de segundo grado es:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Siendo a , b y c constantes, con $a \neq 0$. Busquemos las soluciones de esta ecuación.

²Conjunto de números que no estudiamos, si te interesa puedes ver en www.sectormatematica.cl/complejos

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) &= 0 && \text{Como } a \neq 0 \text{ se tiene que} \\
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\
x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} && \text{Completando cuadrados se tiene que} \\
x^2 + \frac{b}{2a}2x + \frac{b^2}{4a^2} &= -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \\
\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} \\
x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Así hemos llegado a establecer una fórmula general que nos permite encontrar las raíces de cualquier ecuación cuadrática, siendo éstas:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dentro de la fórmula de la ecuación cuadrática distinguiremos a la cantidad sub radical, llamada *Discriminante*, que la abreviaremos por el símbolo Δ .

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Veremos que Δ es un factor importante a la hora de conocer las raíces de la ecuación de segundo grado ya que:

- Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas, ya que todo número positivo tiene siempre dos raíces reales.
- Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una solución real, ya que la única raíz de 0 es 0.
- Si $\Delta < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales, ya que NO existe ningún número real que elevado a 2 de por resultado un número negativo.

5.3.4. Propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado

Al analizar la forma que tienen las raíces de la ecuación cuadrática podemos encontrar dos ecuaciones importantes que nacen de la suma y la multiplicación de las raíces:

Suma de Raíces

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\&= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\&= \frac{-b + 0 - b}{2a} \\&= \frac{-2b}{2a} \\&= -\frac{b}{a}\end{aligned}$$

Multiplicación de Raíces

$$\begin{aligned}x_1 \cdot x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\&= \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}) \cdot (-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2} \\&= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\&= \frac{4ac}{4a^2} \\&= \frac{c}{a}\end{aligned}$$

Con estas dos propiedades, podemos formar una ecuación de segundo grado conociendo sólo sus raíces, ya que:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2$$

O bien, ocupando el hecho de que son raíces, es decir que al reemplazarlas en la ecuación general de segundo grado esta se satisface, podemos reemplazarlas en la ecuación factorizada de la forma:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Y luego multiplicar ambos binomios, ya que de esta manera al reemplazar cualquiera de las soluciones en esta última expresión, esta se satisface.

Veamos un ejemplo de resolución :

♠ Resolvamos la ecuación:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

Primero debemos identificar los coeficientes; $a = 1$, $b = -3$ y $c = 2$, luego las soluciones son:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-(-3) + \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (2)}}{2 \cdot (1)} \\
&= \frac{3 + \sqrt{9 - 8}}{2} \\
&= \frac{3 + 1}{2} \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-(-3) - \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (2)}}{2 \cdot (1)} \\
&= \frac{3 - \sqrt{9 - 8}}{2} \\
&= \frac{3 - 1}{2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

◇

Observa que...

No siempre va a ser necesario utilizar la fórmula de la ecuación cuadrática para poder resolver estas ecuaciones, ya que en algunos casos puedes ocupar los métodos de factorización que aprendiste en el capítulo anterior, (cuadrados de binomio, sumas por su diferencia, binomios con término común, etc ...).

Veamos un ejemplo ocupando factorización :

♠ Resolvamos la ecuación:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

Si te fijas bien puedes darte cuenta que el costado izquierdo de ésta ecuación es el producto de dos binomios, ya que 5 es la suma entre 3 y 2 y 6 es su producto, por lo tanto tenemos que $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$, así nuestra ecuación queda de la forma:

$$(x + 2)(x + 3) = 0$$

Luego como tenemos que el producto entre dos números ($x + 2$ y $x + 3$), es 0, implica que al menos uno de ellos debe ser 0.

$$\Rightarrow x + 2 = 0 \quad \text{o} \quad x + 3 = 0$$

Resultando dos sencillas ecuaciones de primer grado, cuyas soluciones son $x_1 = -2$ y $x_2 = -3$.



Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

- | | | |
|------------------------|---------------------------|--|
| 1. $x^2 + 7x + 12 = 0$ | 8. $-x^2 + 9 = 0$ | 15. $3(3x - 2) = (x + 4)(4 - x)$ |
| 2. $x^2 - x - 2 = 0$ | 9. $(x + 1)(x - 1) = 1$ | 16. $9x + 1 = 3(x^2 - 5) - (x - 3)(x + 2)$ |
| 3. $x^2 - 1 = 0$ | 10. $3x^2 + 2x = 0$ | 17. $(2x - 3)^2 - (x + 5)^2 = -23$ |
| 4. $x^2 = 4$ | 11. $-x^2 - 1 - 2x^2 = 0$ | 18. $3x(x - 2) - (x - 6) = 23(x - 3)$ |
| 5. $x^2 + 2x = -1$ | 12. $3x = x^2 - 1$ | 19. $7(x - 3) - 5(x^2 - 1) = x^2 - 5(x + 2)$ |
| 6. $x^2 + 4x - 5 = 0$ | 13. $10x^2 - x^2 = 9$ | 20. $(x + 4)^3 - (x - 3)^3 = 343$ |
| 7. $x^2 - 110 = x$ | 14. $mx^2 - m^2x = 0$ | 21. $(x + 2)^3 - (x - 1)^3 = x(3x + 4) + 8$ |
-
-

5.4. Sistemas de Ecuaciones

Durante el desarrollo de problemas matemáticos puede ocurrir que te encuentres con una ecuación que presente más de una variable³, en cuyo caso surgirá un problema muy importante, la cardinalidad del conjunto de soluciones de ese tipo de ecuaciones es en general infinita. Por lo tanto necesitamos de otra restricción que deben cumplir nuestras incógnitas para poder encontrarlas, esta nueva restricción la encontramos con una nueva ecuación que en conjunto con la anterior forman lo que llamamos un *Sistema de Ecuaciones*.

Veamos un Ejemplo :

♠ Consideremos la ecuación.

$$2x - y = 1 \tag{5.1}$$

Fijate que en éste caso si $x = 1$ e $y = 1$, la igualdad se cumple, por lo tanto parece que encontramos la solución de la ecuación, pero ¡ojo!, que si $x = 5$ e $y = 9$ la ecuación también se satisface, por lo tanto las soluciones de estas ecuaciones NO son únicas.

Ahora agregémosle otra ecuación para formar el sistema, es decir una nueva restricción que deban cumplir las incógnitas.

$$x + y = 2 \tag{5.2}$$

Ahora, con las ecuaciones (5.1) y (5.2) formamos un llamado sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{array} \right|$$

Fijémonos que para este sistema existe una única solución para cada variable, estas son $x = 1$ e $y = 1$, cualquier otro valor para alguna de las incógnitas no cumplirá con al menos una de las ecuaciones.

³ $3x + 2y = 5$ es una ecuación de dos *incógnitas* o *variables*.

5.4.1. Resolución de Sistemas de Ecuaciones

Resolver un sistema de ecuaciones es encontrar los valores de las incógnitas que satisfacen **ambas ecuaciones**.

Existen tres métodos equivalentes básicos para encontrar las soluciones de los sistemas, estos son:

1. Método por Igualación

Consiste en despejar la misma incógnita de ambas ecuaciones, y como ésta debe ser equivalente entre ambas las podemos igualar, obteniendo de esta forma una ecuación con una sola incógnita.

♠ Consideremos el sistema anterior:

$$\begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{array}$$

De la primera ecuación despejemos y :

$$\begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ 2x = 1 + y \\ 2x - 1 = y \end{array}$$

Ahora de la segunda ecuación despejemos la misma variable:

$$\begin{array}{l} x + y = 2 \\ y = 2 - x \end{array}$$

Luego, como y de la primera ecuación debe ser el mismo que el de la segunda se tiene que:

$$\begin{array}{l} y = y \\ 2x - 1 = 2 - x \\ 2x + x = 2 + 1 \\ 3x = 3 \\ x = \frac{3}{3} \\ x = 1 \end{array}$$

Así, obteniendo una simple ecuación de primer grado logramos obtener la solución para x , ahora para encontrar el valor de y solo debemos reemplazar $x = 1$ en cualquiera de las ecuaciones originales del sistema:

$$\begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ 2 \cdot (1) - y = 1 \\ 2 \cdot 1 - 1 = y \\ 2 - 1 = y \\ y = 1 \end{array}$$

De ésta forma logramos encontrar el valor de la otra incógnita, y con una simple ecuación de primer grado.

2. Método por Sustitución

Este método consiste en despejar una incógnita de alguna de las ecuaciones para luego sustituirla en la segunda, de ésta manera obtendremos una ecuación de una sola incógnita.

♠ Consideremos el sistema anterior:

$$\begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{array}$$

De la primera ecuación despejemos esta vez x .

$$\begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ 2x = 1 + y \\ x = \frac{1 + y}{2} \end{array}$$

Ahora sustituimos este valor en la segunda ecuación, resultando:

$$\begin{array}{l} x + y = 2 \\ \left(\frac{1 + y}{2}\right) + y = 2 \\ \frac{1 + y}{2} + y = 2 \quad \cdot 2 \\ 2 \cdot \left(\frac{1 + y}{2}\right) + 2 \cdot y = 2 \cdot 2 \\ 1 + y + 2y = 4 \\ 3y = 4 - 1 \\ 3y = 3 \\ y = \frac{3}{3} \\ y = 1 \end{array}$$

Como ya sabemos que $y = 1$ y $x = \frac{1+y}{2}$ basta reemplazar y encontramos x .

$$\begin{array}{l} x = \frac{1 + y}{2} \\ x = \frac{1 + (1)}{2} \\ x = \frac{2}{2} \\ x = 1 \end{array}$$

3. Método por Reducción

Ya sabemos que a una igualdad le podemos sumar a ambos lados la misma cantidad sin alterarla⁴, lo que implica que a una ecuación le podemos sumar a ambos lados los miembros de otra ecuación, ya que las partes de esta última no son más que el mismo elemento. Esto quiere decir que si sumamos, o restamos igualdades, obtendremos otra igualdad también válida.

La idea de este método es obtener inteligentemente una tercera ecuación que contenga a solo una de las incógnitas.

♠ Resolvamos el sistema anterior con este método.

$$\left. \begin{array}{r} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{array} \right|$$

Sumemos ambas ecuaciones.

$$\begin{array}{r} 2x - y = 1 \\ + \quad x + y = 2 \\ \hline 3x + 0 = 3 \end{array}$$

De esta manera obtenemos una tercera ecuación que también es verdadera para los mismos valores de x e y . Por lo tanto resolviendo esta ecuación podremos encontrar los resultados.

$$\begin{array}{r} 3x = 3 \\ x = \frac{3}{3} \\ x = 1 \end{array}$$

Para encontrar el valor de y basta reemplazar $x = 1$ en cualquiera de las ecuaciones originales.

♠ Resolvamos otro ejemplo con el método de reducción:

$$\left. \begin{array}{r} 5x + 3y = 10 \\ x - y = 2 \end{array} \right|$$

En este ejemplo no nos sería útil sumar o restar las ecuaciones tal como están ya que obtendríamos una tercera ecuación que contendría ambas incógnitas, por lo que antes debemos “arreglarlas”.

Podemos multiplicar la segunda ecuación por 3, de ésta forma el sistema quedaría de la forma:

$$\left. \begin{array}{r} 5x + 3y = 10 \\ x - y = 2 \end{array} \right| \cdot 3 \Rightarrow \left. \begin{array}{r} 5x + 3y = 10 \\ 3x - 3y = 6 \end{array} \right|$$

⁴Ver página 56

Ahora podemos sumar ambas ecuaciones obteniendo:

$$\begin{array}{r} 5x + 3y = 10 \\ + \quad 3x - 3y = 6 \\ \hline 8x + 0 = 16 \end{array}$$

De ésta manera obtenemos una simple ecuación de primer grado con una incógnita:

$$\begin{array}{r} 8x = 16 \\ x = \frac{16}{8} \\ \Rightarrow x = 2 \end{array}$$

Para encontrar el valor de y se puede hacer un proceso similar⁵, o simplemente reemplazar el valor de x en cualquiera de las ecuaciones originales.

5.4.2. Sistemas de Ecuaciones de 3 incógnitas

Los sistemas de 3 incógnitas deben tener a lo menos 3 ecuaciones para ser resolubles⁶, y la manera de resolverlos es “transformalos” en un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas que ya sabemos resolver. Generalmente la forma mas fácil de hacerlo es utilizando el método de sustitución.

♠ Veamos un ejemplo :

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 5 \quad (1) \\ 3x + y - z = 2 \quad (2) \\ x + y + z = 0 \quad (3) \end{array} \right\}$$

En este caso podemos despejar de la ecuación (2) la variable z y luego reemplazarla en las ecuaciones (1) y (3).

$$\begin{array}{r} (2) \quad 3x + y - z = 2 \\ \quad \quad 3x + y = 2 + z \\ \quad \quad \Rightarrow z = 3x + y - 2 \end{array}$$

Luego, al reemplazar en las ecuaciones (1) y (3) resulta:

⁵Por ejemplo multiplicando la primera ecuación por 3 y la segunda por -5 y luego sumar.

⁶Mas adelante en la página 69, veremos que esto no es del todo cierto

$$\begin{aligned}
 (1) \quad x + 2y + z &= 5 \\
 x + 2y + (3x + y - 2) &= 5 \\
 4x + 3y - 2 &= 5 \\
 4x + 3y &= 7 \quad (4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad x + y + z &= 0 \\
 x + y + (3x + y - 2) &= 0 \\
 4x + 2y - 2 &= 0 \\
 4x + 2y &= 2 \quad (5)
 \end{aligned}$$

Así con las nuevas ecuaciones (4) y (5), formamos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas que ya sabemos resolver:

$$\begin{array}{r|l}
 4x + 3y = 7 & \\
 4x + 2y = 2 & \\
 \hline
 \end{array}$$

Las podemos restar entre ellas para obtener una sexta ecuación de solo una incógnita:

$$\begin{array}{r}
 4x + 3y = 7 \\
 - \quad 4x + 2y = 2 \\
 \hline
 0 + y = 5 \\
 \Rightarrow y = 5
 \end{array}$$

Ahora reemplazamos en la ecuación (4):

$$\begin{aligned}
 4x + 3y &= 7 \\
 4x + 3 \cdot (5) &= 7 \\
 4x + 15 &= 7 \\
 4x &= 7 - 15 \\
 4x &= -8 \\
 x &= \frac{-8}{4} = -2
 \end{aligned}$$

Y con los valores de y y de x obtenidos reemplazamos en alguna de las ecuaciones originales para obtener z :

$$\begin{aligned}
\text{ecuación(3)} \Rightarrow x + y + z &= 0 \\
(-2) + (5) + z &= 0 \\
3 + z &= 0 \\
\Rightarrow z &= -3
\end{aligned}$$

De esta manera finalmente logramos obtener todos los valores del sistema original.

5.4.3. Casos Especiales

1. Cuando hay más de una solución

En general resolverás sistemas que tienen solo una solución para cada variable, pero puede ocurrir que te encuentres con un sistema al que no puedas llegar a una solución concreta, no porque hagas las cosas mal, sino por que puedes estar en presencia de una sistema *linealmente dependiente* o *l.d.*, que se refiere a que las ecuaciones que lo conforman son productos unas de otras, es decir; podemos obtener una de las ecuaciones del sistema multiplicando otra por algún número real, o sumándolas entre ellas.

En general, para todo sistema de la forma:

$$\begin{array}{l}
ax + by = c \\
dx + ey = f
\end{array}$$

Si $\exists m \in \mathbb{R}$ tal que $a = m \cdot d$, $b = m \cdot e$ y $c = m \cdot f$, entonces las ecuaciones son *linealmente dependientes*. Cuando esto no ocurre y estamos con un sistema que si tiene soluciones únicas se denomina sistema *linealmente independiente* o *l.i.*.

2. Cuando no hay solución

Dado un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\begin{array}{l}
ax + by = c \\
dx + ey = f
\end{array}$$

Si $\exists m \in \mathbb{R}$ tal que $a = m \cdot d$, $b = m \cdot e$ y $c \neq m \cdot f$, entonces el sistema no tiene solución.



Actividad

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando los métodos de resolución que te parezcan más convenientes:

$$1. \quad \begin{array}{l} 7x - 2y = 5 \\ 5x + 3y = 2 \end{array}$$

$$2. \quad \begin{array}{l} x - 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{array}$$

$$3. \quad \begin{array}{l} 5x + 17y = 0 \\ 15x + 51y = 10 \end{array}$$

$$4. \quad \begin{array}{l} 6x - 3y = 5 \\ -6y + 12x = 10 \end{array}$$

$$5. \quad \begin{array}{l} ax + by = c \\ ax - by = c \end{array}$$

$$6. \quad \begin{array}{l} x - ay = b \\ bx + y = a \end{array}$$

$$7. \quad \begin{array}{l} x + 6y = 27 \\ 7x - 3y = 9 \end{array}$$

$$8. \quad \begin{array}{l} 3x - 2y = -2 \\ 5x - 8y = -60 \end{array}$$

$$9. \quad \begin{array}{l} 3x + 5y = 7 \\ 2x - y = -4 \end{array}$$

$$10. \quad \begin{array}{l} 7x - 4y = 5 \\ 9x + 8y = 13 \end{array}$$

$$11. \quad \begin{array}{l} 9x + 16y = 7 \\ 4y - 3x = 0 \end{array}$$

$$12. \quad \begin{array}{l} 14x - 11y = -29 \\ 13y - 8x = 30 \end{array}$$

$$13. \quad \begin{array}{l} x + y + z = 8 \\ x - \frac{y}{3} + \frac{4}{3}z = 7 \\ 3z - 3y - 2x = 7 \end{array}$$

$$14. \quad \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 5 \\ y + 2z = 2 \end{array}$$

5.5. Mini Ensayo V Ecuaciones Algebraicas

1. La edad de Cristina es un tercio de la edad de su padre y dentro de 16 años será la mitad, entonces la edad de Cristina es:

- a) 16
- b) 24
- c) 32
- d) 48
- e) 64

2. Sea $x = 2y + 5$, si $x = 3$ entonces $y =$

- a) 1
- b) -1
- c) $3/2$
- d) 4
- e) 11

3. De una torta Gonzalo se come la mitad, Cristian la sexta parte y Paola la tercera parte, ¿qué parte de la torta quedó?

- a) $\frac{1}{3}$

- b) $1/6$
- c) $\frac{1}{9}$
- d) $1/18$
- e) Nada

4. La edad de una persona es $(12a + 8)$ años, ¿hace cuántos años tenía la cuarta parte de su edad actual?

- a) $3a + 2$
- b) $12a + 4$
- c) $3a + 4$
- d) $9a + 8$
- e) $9a + 6$

5. El valor de x en la ecuación $7(5x + 5) = 5(6x + 4)$ es:

- a) -10
- b) -3
- c) 3
- d) 10
- e) 11

6. Si al quintuplo de un cierto número se le restan 16, se obtiene el triple del mismo número, ¿cuál es el número?

- a) 2
- b) -2
- c) 8
- d) -8
- e) $19/5$

7. Gonzalo tiene el doble de dinero que Cristian, si entre ambos se quieren comprar una pelota de \$1.000 Gonzalo debería tener el doble de dinero que tiene. ¿cuánto dinero tiene Cristian?

- a) \$100
- b) \$200
- c) \$300
- d) \$400
- e) \$500

8. Si $x + z = y$, $2y = 3x$ y $x + y + z = 18$, entonces el valor de z es:

- a) 9
- b) 6

- c) 4,5
- d) 4
- e) 3

9. Dada la ecuación $(x + 1)^2 = 1$, la suma de sus dos soluciones es igual a:

- a) 0
- b) 2
- c) -2
- d) -1
- e) 1

10. Si $m^2 = 4nh$ entonces la ecuación $x(nx + m) = -h$ tiene:

- a) Dos soluciones.
- b) Una solución.
- c) No tiene soluciones.
- d) Infinitas soluciones.
- e) No se puede determinar la cantidad de soluciones.

11. Si y es el sucesor de x , y x es el triple del antecesor de y , entonces los valores de x e y son respectivamente:

- a) 0 y 1
- b) -1 y 0
- c) 1 y 0
- d) 0 y -1
- e) 0 y 0

12. El producto de las raíces de la ecuación $x^2 + x = 12$ es:

- a) 12
- b) -12
- c) 3
- d) -4
- e) -1

13. La semi suma de dos números es 10, y su semi diferencia es 5, ¿cuál es el Mínimo común múltiplo entre dichos números?

- a) 25
- b) 20
- c) 15
- d) 10
- e) 5

14. Cuál debe ser el valor de k para que una de las soluciones de la ecuación $x^2 = 2x - k + 10$ sea 1.

- a) 10
- b) 11
- c) 12
- d) 13
- e) 14

15. La diferencia entre un número y su cuarta parte es 9, entonces el doble del número es:

- a) 12
- b) 18
- c) 24
- d) 36
- e) 90

16. Cristian es 3 años mayor que Gonzalo, en 5 años más sus edades sumarán 35 años, ¿Qué edad tiene Gonzalo?

- a) 11
- b) 14
- c) 16
- d) 19
- e) 20

17. Si $1 - \frac{3}{x} = 9$ entonces $x =$

- a) $-\frac{9}{2}$
- b) $-\frac{2}{9}$
- c) $\frac{9}{2}$
- d) $\frac{8}{3}$
- e) $-\frac{3}{8}$

18. La suma de las soluciones del sistema,
$$\left. \begin{array}{l} x + y = z \\ 2x + z = 3y - 1 \\ 2y + x = 5 \end{array} \right\} \text{ es:}$$

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 6
- e) 0

19. Las raíces de la ecuación $x(x - 1) = 20$ son:

- a) 1 y 20
- b) 2 y 20
- c) 4 y 5
- d) 4 y -5
- e) -4 y 5

20. Una ecuación que tenga por raíces a $x_1 = 2 + \sqrt{2}$ y $x_2 = 2 - \sqrt{2}$ es:

- a) $x^2 + 4x + 2$
- b) $x^2 + 4x - 2$
- c) $-x^2 - 4x + 2$
- d) $x^2 - 4x + 2$
- e) $x^2 - 4x - 2$