

Capítulo 6

Ecuaciones no Algebraicas

Generalmente para lograr resolver problemas de la vida cotidiana utilizando matemática, se ocupan ecuaciones algebraicas, ya que estas son suficientes para la mayoría de los problemas que nos puedan acontecer.

Sin embargo, en el estudio más acabado de la matemática te encontrarás en circunstancias en que un problema solo puede ser resuelto con las llamadas *Ecuaciones no Algebraicas*, como por ejemplo para describir fenómenos del electromagnetismo.

Las llamadas ecuaciones no algebraicas son aquellas en que la incógnita o variable a encontrar no esta presente en un polinomio, por lo que no nos serán de utilidad los métodos de resolución que vimos anteriormente.

Las ecuaciones no algebraicas que estudiaremos son principalmente las *Ecuaciones Exponenciales* y las *Ecuaciones Logarítmicas*.

6.1. Ecuación Exponencial

Las ecuaciones exponenciales son aquellas ecuaciones en que la incógnita esta presente en el exponente de una cantidad.

♠ Por ejemplo:

† $3^{x+1} + 1 = 2$, Si es una ecuación exponencial.

† $3x^2 + 8x = 8$, No es una ecuación exponencial.

6.1.1. Resolución de Ecuaciones Exponenciales

Para resolver las ecuaciones exponenciales principalmente ocupamos las siguientes propiedades:

1. $a^b = a^c \Leftrightarrow b = c$

2. $a^b = c^b \Leftrightarrow a = c$

Es decir, debemos lograr igualar las bases de las potencias de éstas ecuaciones para de ésta manera poder “trasformar” una ecuación exponencial en una ecuación algebraica.

♠ Ejemplo 1

$$\begin{aligned}5^{x+9} &= 125 \\5^{x+9} &= 5^3 \\ \Rightarrow x + 9 &= 3 \\ x &= 3 - 9 \\ x &= -6\end{aligned}$$

♠ Ejemplo 2

$$\begin{aligned}3^{x+1} - 2 &= 25 \\3^{x+1} &= 25 + 2 \\3^{x+1} &= 27 \\3^{x+1} &= 9 \cdot 3 \\3^{x+1} &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \\3^{x+1} &= 3^3 \\ \Rightarrow x + 1 &= 3 \\ x &= 3 - 1 \\ x &= 2\end{aligned}$$

♠ Ejemplo 3

$$\begin{aligned}8^{4x-8} - 9 &= -8 \\8^{4x-8} &= -8 + 9 \\8^{4x-8} &= 1 \\8^{4x-8} &= 8^0 \\ \Rightarrow 4x - 8 &= 0 \\4x &= 8 \\ x &= \frac{8}{4} \\ x &= 2\end{aligned}$$



Actividad

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

- | | | |
|------------------------------|---|----------------------------------|
| 1. $2^{x-5} = 1$ | 6. $4^x = \frac{1}{64}$ | 11. $\sqrt[5]{25^x - 1} - 1 = 0$ |
| 2. $4^{3x+6} - 2^{2x-7} = 0$ | 7. $\sqrt[4]{a^{6x+2}} = a^{x-9}$ | 12. $\sqrt{1024^{2x+8}} = 2^x$ |
| 3. $8^{3x+5} = 4^{x-1}$ | 8. $\sqrt{4^x} - \sqrt[3]{8^{x+1}} = 0$ | 13. $81^x = \frac{1}{243}$ |
| 4. $10^{x(x+1)} = 1$ | 9. $\pi^{9^x} = \pi$ | 14. |
| 5. $256^{2x+5} - 2^x = 2^x$ | 10. $\sqrt[10]{9^{x^2}} = 3$ | 15. |
-
-

6.2. Ecuación Logarítmica

6.2.1. Significado de un Logaritmo

El logaritmo de un número es el exponente al que hay que elevar otro número llamado base para obtener el número en cuestión.

♠ Por ejemplo, veamos las potencias del número 3.

$$\begin{aligned}3^0 &= 1 \\3^1 &= 3 \\3^2 &= 9 \\3^3 &= 27 \\&\vdots\end{aligned}$$

Así, el logaritmo en base 3 de 1 es 0, ya que 0 es el exponente al que hay que elevar 3 para dar por resultado 1; de la misma manera el logaritmo de base 3 de 3 es 1, el logaritmo en base 3 de 9 es 2, el logaritmo en base 3 de 27 es 3, etc.

La notación que ocupamos para representar los logaritmos es la siguiente:

$$\log_a b = c$$

Y se lee *el logaritmo en base a de b es c*.

La notación anterior del logaritmo, la podemos explicar de la siguiente manera:

$$\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b$$

Cuando no se escribe la base de un logaritmo se asume que esta es 10, es decir:

$$\log a = \log_{10} a$$

6.2.2. Propiedades de los Logaritmos

- 1. La base de un logaritmo no puede ser negativa**, ya que si lo fuera sus potencias pares serían positivas y las impares negativas, y tendríamos una serie de números alternadamente positivos y negativos, resultando números positivos que no tendrían logaritmo.
- 2. Los números negativos no tienen logaritmo**, ya que siendo la base positiva, cualquiera de sus potencias es siempre un número positivo.
- 3. Para cualquier logaritmo, el logaritmo de la base es siempre 1**, pues siendo una base a , entonces $a^1 = a$, es decir:

$$\log_a a = 1 \quad \forall \quad a$$

- 4. Para cualquier logaritmo, el logaritmo de 1 es 0**, pues para todo $a \neq 0$ se tiene que $a^0 = 1$, es decir:

$$\log_a 1 = 0 \quad \forall \quad a$$

5. **El logaritmo de un producto**, es la suma de sus logaritmos, es decir:

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

6. **El logaritmo de un cociente**, es la diferencia de sus logaritmos, es decir:

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$$

7. **El logaritmo de una potencia**, es el producto entre el exponente y el logaritmo de la base, es decir:

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

8. **El logaritmo de una raíz**, es el cociente entre el logaritmo de la cantidad sub-radical y el índice de la raíz, pues $\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$ y ocupamos la propiedad anterior para las potencias, es decir:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$$

9. **El cambio de base**; se cumple siempre para el logaritmo en cualquier base de cualquier número que:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \forall \quad c$$

6.2.3. Resolución de Ecuaciones Logarítmicas

Para resolver las ecuaciones logarítmicas principalmente ocupamos la siguiente propiedad:

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$$

Por lo tanto para lograr resolverlas, la idea es lograr dejar la ecuación en cuestión de la forma $\log(\text{algo}) = \log(\text{algo mas})$.

Veamos algunos ejemplos :

♠ Ejemplo 1

$$\begin{aligned} \log(9x + 5) &= \log(x + 1) + 1 \\ \log(9x + 5) &= \log(x + 1) + \log 10 \\ \log(9x + 5) &= \log((x + 1) \cdot 10) \\ \log(9x + 5) &= \log(10x + 10) \\ \Rightarrow 9x + 5 &= 10x + 10 \\ 9x - 10x &= 10 - 5 \\ -x &= 5 \quad / \cdot -1 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

♠ Ejemplo 2

$$\begin{aligned}\log(3 - x^2) &= \log(2) + \log(x) \\ \log(3 - x^2) &= \log(2 \cdot x) \\ \Rightarrow 3 - x^2 &= 2x \\ 0 &= x^2 + 2x - 3 \\ 0 &= (x - 1)(x + 3) \\ \Rightarrow x_1 = 1 \quad \text{y} \quad x_2 = -3\end{aligned}$$

Fíjate que en el último ejemplo al sustituir el valor -3 en la ecuación original esta queda: $\log(-6) = \log(2) + \log(-3)$, sin embargo el logaritmo de números negativos NO existe, por lo tanto la única solución es $x = 1$.

Recuerda siempre comprobar tus resultados.

♠ Ejemplo 3

$$(\log(x))^2 = 35 - 2 \log(x)$$

En este caso podemos ocupar variable auxiliar, consideremos que $\log(x) = y$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (y)^2 &= 35 - 2(y) \\ 0 &= y^2 + 2y - 35 \\ 0 &= (y - 5)(y + 7) \\ \Rightarrow y_1 = 5 \quad \text{y} \quad y_2 = -7 \\ \log(x_1) = 5 \quad \text{y} \quad \log(x_2) = -7 \\ x_1 = 10^5 \quad \text{y} \quad x_2 = 10^{-7}\end{aligned}$$



Actividad

I. Calcula los siguientes logaritmos:

- | | | |
|---------------------|----------------------|------------------------------|
| 1. $\log_4 64 =$ | 4. $\log_{16} 8 =$ | 7. $\log_{81} 3 =$ |
| 2. $\log_{1/3} 9 =$ | 5. $\log_{125} 25 =$ | 8. $\log_4 32 - \log_2 16 =$ |
| 3. $\log(\pi^0) =$ | 6. $\log_1 5 =$ | 9. $\log_b(b^b) =$ |

II. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

- | | |
|--|--|
| 1. $\log(x + 1) = \log(2x - 5)$ | 5. $\log(x + 3) - \log(x + 4) = \log(x - 7) - \log(x - 4)$ |
| 2. $\log 5 + \log(x + 4) = \log(x - 8)$ | 6. $(\log(x))^2 - 2 \log(x) = -1$ |
| 3. $\log(x + 7) + \log(x - 3) = \log(x^2 + 3)$ | 7. $5(\log(x))^2 - 2 \log(x) = 3$ |
| 4. $\log(x + 8) - \log(x) = \log(3x + 9)$ | 8. $\log(x + 1) + \log(x + 3) = \log(x - 2) + \log(x - 3)$ |
-
-

6.3. Aplicación de los Logaritmos a las ecuaciones exponenciales

En la resolución de las ecuaciones exponenciales existen el casos en que no podremos resolverlas igualando las bases, sencillamente porque no será posible. Para estas situaciones es posible ocupar los logaritmos.

Veamos algunos ejemplos :

♠ Ejemplo 1

$$\begin{aligned}7^x &= 6 & / \log() \\ \log(7^x) &= \log(6) \\ x \cdot \log(7) &= \log(6) \\ x &= \frac{\log(6)}{\log(7)} \\ x &= \log_7 6\end{aligned}$$

♠ Ejemplo 2

$$\begin{aligned}2^{x+1} \cdot 5^x &= 9 & / \log() \\ \log(2^{x+1} \cdot 5^x) &= \log(9) \\ \log(2^{x+1}) + \log(5^x) &= \log(9) \\ (x+1)\log(2) + x\log(5) &= \log(9) \\ x\log(2) + \log(2) + x\log(5) &= \log(9) \\ x\log(2) + x\log(5) + \log(2) &= \log(9) \\ x(\log(2) + \log(5)) + \log(2) &= \log(9) \\ x(\log(2) + \log(5)) &= \log(9) - \log(2) \\ x(\log(2) + \log(5)) &= \log(9/2) \\ x\log(2 \cdot 5) &= \log(9/2) \\ x\log(10) &= \log(9/2) \\ x \cdot 1 &= \log(9/2) \\ x &= \log(9/2)\end{aligned}$$

♣

Actividad

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales ocupando logaritmos:

- $2^{x+3} = 4$
 - $16^{x-2} = 128^{x+4}$
 - $5^{2x} = 10.000$
 - $3^{x-4} \cdot 7^{x-3} = 147$
 - $2^{x-1} \cdot 5^{x-1} = 250$
 - $2^{x-2} \div 5^{x-1} = 0,032$
 - $\sqrt[x]{4} \cdot \sqrt[x]{5} = 400$
 - $2^{x-3} + 2^{x-2} + 2^{x-1} + 2^{x+1} = \frac{23}{12}$
-
-

6.4. Mini Ensayo VI

Ecuaciones no Algebraicas

1. ¿Cuál es el valor de x en la ecuación $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 155$?

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) $1/3$
- e) -3

2. Determine el valor de $\log_3(0, \bar{1})$

- a) $-1/3$
- b) -2
- c) $1/3$
- d) 2
- e) $\sqrt[3]{9}$

3. ¿Al antecesor de que número debe elevarse 2 para obtener 32?

- a) 2
- b) 3
- c) 4
- d) 5
- e) 6

4. La expresión $\frac{\log_a b}{\log_a c}$ es equivalente a:

- a) $\log_a a$
- b) $\log_c b$
- c) $\log_b c$
- d) $\log_a(b + c)$
- e) $\log_a(b \cdot c)$

5. Si $\log \sqrt{a} = 0,7186$, entonces $\log a^2 =$

- a) $(0,7186)^4$
- b) 4,7186
- c) $2 \log(0,7186)$
- d) $4 \cdot 0,7186$
- e) $4 \log 0,7186$

6. En la expresión $\log_m(n \cdot m^3) = 3$, si $m > 1$ entonces $n =$

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 3
- e) No se puede determinar.

7. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es FALSA?

- a) El logaritmo de 1 en cualquier base, siempre es 0.
- b) $x \log_a a^x = x^2$
- c) La base de un logaritmo no puede ser negativa
- d) El logaritmo de una suma es el producto de los logaritmos
- e) El logaritmo de un cociente es la diferencia de los logaritmos

8. El valor de x en la ecuación $10^x = 2$ es:

- a) $\log_2 10$
- b) $\log 5 - 1$
- c) $1 - \log 5$
- d) $-\log_2 10$
- e) $\log 2,01$

9. Si $4^x = \frac{1}{64}$ entonces $x =$

- a) -3
- b) 3
- c) -2
- d) 2
- e) $\log_4 64$

10. Si $2^{x-5} = 1$, entonces el valor de $\log_x 5$ es:

- a) 0
- b) -1
- c) -5
- d) 5
- e) 1

11. Dada la ecuación $\log(x + 1) = -1$ el valor x corresponde a:

- a) 1,1
- b) 0,9
- c) 0
- d) -0,9

e) -2

12. Si $\log\left(\frac{1}{1-x}\right) = 2$, entonces x vale

a) $-0,99$

b) -99

c) $0,99$

d) $-1,01$

e) $\frac{19}{20}$

13. Si $x = b$ entonces $\log a^{x-b} + \log b^{b-x} + \log x^2 - \log b^2$ es igual a:

a) $x + b$

b) 0

c) 1

d) $a - b$

e) Ninguna de las anteriores.

14. Si $\log_x a = 2$, entonces $\log_x (ax)^2 =$

a) 4

b) $\log_x (2a)$

c) $\log_x x^6$

d) $2 \log_x x$

e) $2a$

15. Cual es el valor de x en la ecuación $\log(x + 2) + \log(x + 3) = \log 2$

a) -4 y -1

b) -4

c) 1

d) -1

e) 4

16. El valor de x en la ecuación $a^x = bc$ es:

a) $\log b + \log c - \log a$

b) $\log a + \log b - \log c$

c) $\log a - \log b - \log c$

d) $\frac{\log b + \log c}{\log a}$

e) Ninguna de las anteriores.

17. Sea a un número distinto de 0 , entonces el valor de la expresión $\sqrt[a]{\frac{4^{a+2} - 4^a}{15}}$ es:

a) $4 \sqrt[a]{\frac{1}{15}}$

b) $\sqrt[a]{\frac{1}{15}}$

c) 4^a

d) 4

e) Ninguna de las anteriores.

18. Si $2^{2x} = 8$, ¿cuántas veces x es igual a 9?

a) 6

b) $\frac{9}{2}$

c) 3

d) $\frac{3}{2}$

e) Ninguna de las anteriores.