Capítulo 8

Funciones

El concepto de función es sin duda uno de los más importantes para todo hombre de ciencia, al estudiar distintos fenómenos que ocurren en nuestro mundo siempre se trata de obtener relaciones entre ellos, de que dependen, porque ocurren, que pasaría si cambiaramos un factor, en fin, todos estos objetivos se resumen en encontrar una función que relacione causa y efecto de los acontecimientos del mundo que nos rodea.

En el presente capítulo estudiaremos los conceptos más básicos en el estudio de funciones; tipos de funciones, representaciones y ejemplos.

8.1. El Concepto de Función

Una función es una regla que relaciona los elementos de dos conjuntos, es decir a todos los elementos de un conjunto inicial que llamaremos *Dominio*[1] le asigna por medio de alguna regla, uno y solo uno de los elementos de un conjunto final que llamaremos *Codominio*, al elemento inicial se le conoce como *Preimagen* y el elemento que se le asigna a través de la función como *Imagen*.

♠ Podríamos considerar, por ejemplo, que una función f es una especie de máquina a la que cuando ingresa un elemento de un Dominio $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ se le es asignado un elemento de el Codominio $B = \{a, b, c, d, e, f\}$.

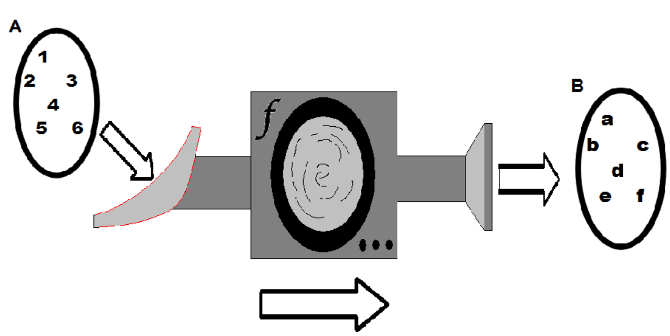


Figura 8.1: Función f, que transforma un elemento de A en uno de B

[1]Lo podemos abreviar como *Dom(f)*

A ésta máquina la representaremos matemáticamente por $f(x)$ que se lee "efe de equis". Y para indicar el dominio y el codominio de la función usaremos la notación: $f : A \to B$, donde A es el dominio y B es el codominio.

El conjunto formado por todas las imágenes de una función es conocido domo *Recorrido*[2].El Recorrido de una función es un subconjunto del codominio de la misma.

A las funciones se les puede clasificar por la manera de relacionar los elementos del Dominio con los del Codominio.

8.1.1. Funciones Inyectivas

Las funciones inyectivas son aquellas en que ningún elemento del recorrido es imagen de más de un elemento del dominio, es decir, no existen dos o más preimágenes que vayan a dar a la misma imagen.

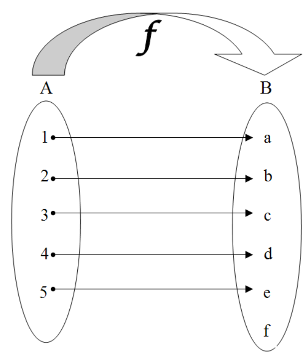


Figura 8.2: Ejemplo de Función Inyectiva

8.1.2. Funciones Sobreyectivas o Epiyectivas

Las funciones sobreyectivas, también conocidas como epiyectivas, son todas aquellas en que todos los elementos del codominio son imágenes de a lo menos un elemento del dominio, es decir, el codominio es igual al recorrido.

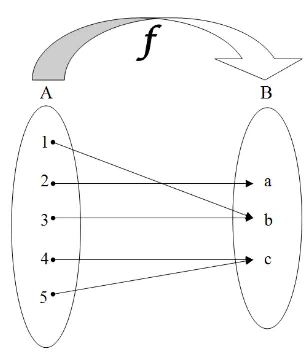


Figura 8.3: Ejemplo de Función Sobreyectiva

[2]Lo podemos abreviar como *Rec(f)*

8.1.3. Funciones Biyectivas

Las funciones biyectivas son todas aquellas que son inyectivas y sobreyectivas al mismo tiempo, es decir, cada imagen tiene una y solo una preimagen y no existen elementos del codominio que no tengan preimagen.

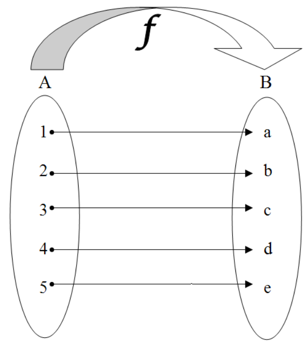


Figura 8.4: Ejemplo de Función Biyectiva

8.1.4. Composición de Funciones

Sean f y g dos funciones talque $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$. Entonces definiremos la composición entre f y g de la forma $g \circ f$, que se lee "efe compuesto con ge" y generamos una nueva función que toma un elemento de A, lo lleva a través de f a B y luego a través de g lo lleva a C, por lo tanto:

$$g \circ f : A \rightarrow C$$

8.1.5. La Función Inversa

La inversa de una función es aquella cuyo dominio es igual al recorrido de la función original y su recorrido es igual al dominio de la misma función, es decir; si $f : A \rightarrow B$ entonces $f^{-1} : B \rightarrow A$, observa que para que se mantenga el concepto de función para la función inversa ésta solo puede existir para las funciones biyectivas pues ningún elemento de B puede no tener imagen a través de la función inversa, lo que obliga a que todos los elementos de B llege algún elemento de A (sobreyectividad), y además que llegue solo uno (inyectividad), pues cuando la función inversa actúe debe asignarle uno y solo uno de los elemento de A a cada elemento de B.

♠ Por ejemplo:
Sean $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$, sea $f : A \rightarrow B$ talque $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$, $f(a_3) = b_3$, $f(a_4) = b_4$ y $f(a_5) = b_5$. Entonces la función inversa de f, f^{-1} será: $f^{-1} : B \rightarrow A$ talque $f(b_1) = a_1$, $f(b_2) = a_2$, $f(b_3) = a_3$, $f(b_4) = a_4$ y $f(b_5) = a_5$.

Notemos que si componemos f con f^{-1} dejamos todos los elementos del dominio de f igual, pues si $f : A \rightarrow B$ y $f^{-1} : B \rightarrow A$ entonces $f^{-1} \circ f : A \rightarrow A$ y corresponderá a cada elemento consigo mismo, a la función que hace ésto la conocemos como *Identidad* y la abreviamos como $\mathcal{I}$.

8.1.6. Funciones Crecientes

Son aquellas funciones que tienen como dominio y codominio a $\mathbb{R}$, es decir; $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, y que si un elemento del dominio es **mayor** que otro, entonces su imagen será **mayor** que la imagen del otro, es decir:

$$\text{Si } a > b, \text{ entonces } f(a) > f(b)$$

8.1.7. Funciones Decrecientes

Son aquellas funciones que tienen como dominio y codominio a $\mathbb{R}$, es decir; $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y que si un elemento del dominio es **mayor** que otro, entonces su imagen será **menor** que la imagen del otro, es decir:

$$\text{Si } a > b, \text{ entonces } f(a) < f(b)$$

8.1.8. Funciones Pares e Impares

1. **Función Par**

   Las funciones pares son aquellas en que se cumple para todos los elementos del dominio que $f(x) = f(-x)$, es decir:

$$\forall a \in Dom(f) \to f(a) = f(-a)$$

2. **Función Impar**

   Las funciones impares son aquellas en que se cumple para todos los elementos del dominio que $f(x) = -f(-x)$, es decir:

$$\forall a \in Dom(f) \to f(a) = -f(-a)$$

8.2. El Plano Cartesiano

El plano cartesiano o sistema de ejes coordenados debe su nombre al matemático francés Rene Descartes[3], es utilizado principalmente en la Geometría Analítica[4], pero nosotros lo ocuparemos para estudiar las funciones por medio de sus gráficos.

El plano cartesiano consta de dos rectas numéricas que se cortan perpendicularmente en el 0 de ambas, a este punto se le conoce como *origen*, la recta horizontal se conoce como *eje de las abscisas* o *eje de las x* y a la recta vertical como *eje de las ordenadas* o *eje de las y*, se divide en cuatro cuadrantes, los cuales son:

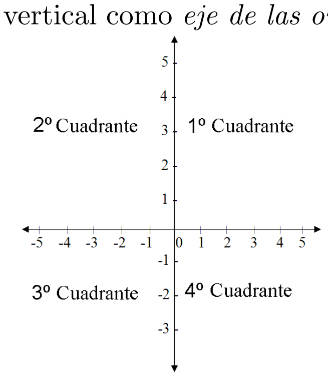


Figura 8.5: El plano cartesiano y sus 4 cuadrantes

[3] Descartes, filósofo y matemático francés, vivió entre los años 1596 y 1650, fué el primero en aplicar el Álgebra a la Geometría, creando así la Geometría Analítica

[4] Rama de la matemática que estudia la geometría desde un punto de vista algebraico

8.2.1. Determinación de un punto por sus coordenadas

Los ejes coordenados nos sirven para determinar cada punto del plano, es decir, cualquier parte del plano que yo escoja ya tiene un nombre si es que en ese plano tengo dibujado un sistema de ejes perpendiculares. El nombre que le es asignado a cada punto viene dado por sus proyecciones sobre los ejes, ambas llamadas *coordenadas*.

Las proyecciones son la imagen del punto sobre los ejes, y estas las encontramos trazando una línea perpendicular al eje y que a traviese al punto en cuestión, el lugar donde esta recta se intersecta con el eje será la coordenada del punto respecto al eje que se proyectó.

La manera de escribir los nombres de los puntos del plano es formando un conjunto llamado *par ordenado*, este conjunto esta formado por dos elementos que tienen una posición prefijada, es decir, su posición es única e inalterable, se denota de la forma (a, b) donde la primera componente sera la coordenada del punto en cuestión sobre el eje de las abscisas y la segunda componente será la coordenada sobre el eje de las ordenadas.

Dos pares ordenados serán iguales si cada una de sus componentes son respectivamente iguales, es decir:

$$(a, b) = (c, d) \Longleftrightarrow a = c \text{ y } b = d$$

♠ Por ejemplo:

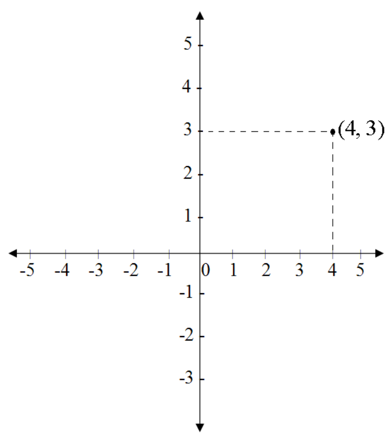


Figura 8.6: Ubicación del punto (4,3) en el plano cartesiano

♢ 𝔒𝔟𝔰𝔢𝔯𝔳𝔞 𝔮𝔲𝔢 ...

† *Las coordenadas del origen son* $(0, 0)$.

† *La abscisa de cualquier punto situado en el eje de las* y *es* 0.

† *La ordenada de cualquier punto situado en el eje de las* x *es* 0.

† *Los signos de las coordenadas de un punto dependen del cuadrante en el que se posicione.*

	Signo de la abscisa	*Signo de la ordenada*
Si está en el 1^{er} *cuadrante*	$+$	$+$
Si está en el 2^{do} *cuadrante*	$-$	$+$
Si está en el 3^{er} *cuadrante*	$-$	$-$
Si está en el 4^{to} *cuadrante*	$+$	$-$

8.2.2. Representación gráfica de las funciones

Las funciones que estudiaremos son únicamente funciones donde su dominio y su codominio son el conjunto de los números reales, o simplemente $\mathbb{R}$, y en un sistema de ejes coordenados se hace presente este conjunto en ambas rectas que lo componen, es por esto que se utilizan sus ejes como el dominio y el codominio de las funciones ya que de esta manera apreciamos una buena representación de ellas.

El eje de las abscisas se utiliza para representar a las preimágenes (por lo tanto el eje de las x sería el dominio de la función), y el eje de las ordenadas se utiliza para representar a las imágenes (por lo tanto el eje de las y sería el codominio de la función).

Las "reglas" que discriminan lo que hacen las funciones que estudiaremos serán dadas siempre por ecuaciones de dos incógnitas donde la incógnita x será la preimagen y que ahora llamaremos *variable independiente* y la incógnita y será la imagen y que llamaremos *variable dependiente* pues depende del valor de x.

De esta manera podemos decir que $f(x) = y$.

8.3. Algunas Funciones Importantes

Existe una infinita cantidad de funciones distintas, pero algunas de ellas, las que te preguntarán en la PSU, las podemos clasificar de las siguientes maneras :

8.3.1. Función Lineal

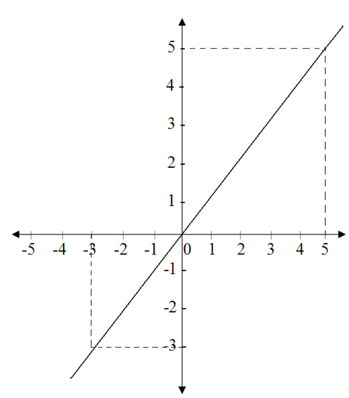
Las funciones lineales son todas aquellas que están determinadas por una ecuación de primer grado de la forma:

$$y = f(x) = mx \qquad \text{con } m \text{ constante}$$

Se conoce a m como constante de de proporcionalidad debido a que la función lineal relaciona a x y a y de manera proporcional[5], pero principalmente desde el punto de vista de funciones llamaremos a m **pendiente**, pues al ver representada gráficamente la función lineal, m sera la que determine la inclinación de la gráfica.

♠ Grafiquemos la función $y = x$ donde $m = 1$; para hacerlo debemos dar valores a x, para obtener valores para y, luego ubicaremos estos puntos en el plano cartesiano y los uniremos:

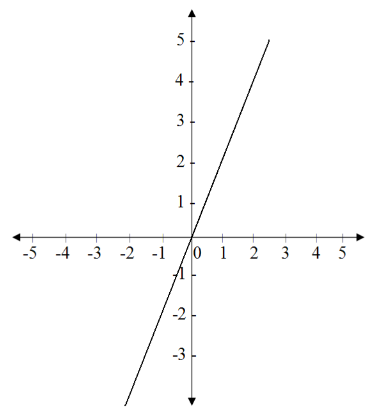
x	y
-3	-3
-1	-1
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
$\vdots$	$\vdots$



[5] Ver página 25

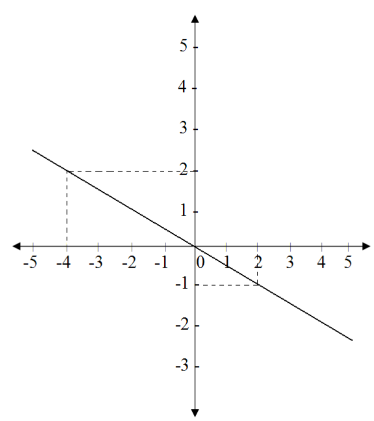
♠ Grafiquemos la función $y = 2x$ donde $m = 2$; para hacerlo debemos dar valores a x, para obtener valores para y, luego ubicaremos estos puntos en el plano cartesiano y los uniremos:

x	y
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
$\vdots$	$\vdots$



♠ Grafiquemos la función $y = -\frac{1}{2}x$ donde $m = -\frac{1}{2}$; De la misma manera aterior le daremos valores a x, para obtener valores para y:

x	y
-4	2
-2	1
0	0
1	-0,5
2	-1
4	-2
5	-2,5
6	-3
$\vdots$	$\vdots$



Como puedes darte cuenta en las diferencias entre los gráficos anteriores, lo único que cambia es la pendiente m, lo que significa que ésta determina por completo la forma del gráfico. Por lo tanto nos lleva a concluir:

† Si m es positivo entonces el gráfico de la función pasará entre el 3^{er} y el 1^{er} cuadrante, es decir, será un función creciente.

† Si m es negativo entonces el gráfico de la función pasará entre el 2^{do} y el 4^{to} cuadrante, es decir, será una función decreciente.

† Si m_1 es mayor que m_2 entonces el gráfico de la función $y = m_1x$ será “mas inclinado” que el gráfico de la función $y = m_2x$, en este caso se dice que la primera función tiene una mayor pendiente.

8.3.2. Función Afín y la Recta

La Función Afín

Una función afín es aquella que está determinada por una ecuación de primer grado de la forma:

$$y = f(x) = mx + n \qquad \text{con } m \text{ y } n \text{ constantes}$$

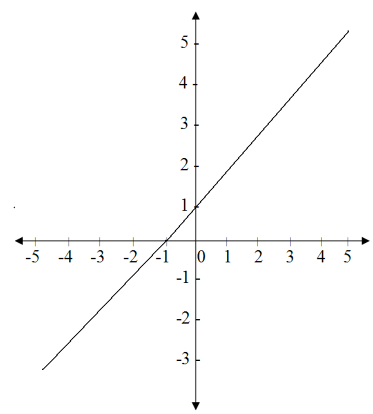
La ecuación de una función afín es conocida como ecuación de la recta, precisamente porque las gráficas de todas las funciones de ésta forma son precisamente lineas rectas.

◇ **Observa que...**

Las funciones lineales son un caso particular de las funciones afines, pues si en una función afín de la forma $y = mx + n$ se tiene que $n = 0$, tendremos entonces la ecuación de una función lineal.

♠ Grafiquemos la función $y = x + 1$; debemos dar valores a x, para calcular los valores de y para poder graficar.

x	y
-4	-3
-2	-1
0	1
1	2
2	3
4	5
6	7
7	8
⋮	⋮



Notemos que la inclinación es la misma que la de la función $y = x$, pues tiene la misma pendiente.

La Recta

Una Recta es la representación gráfica de una función afín. Si un punto del plano (x, y) pertenece a la recta, diremos entonces que ese punto satisface la ecuación de la recta.

Existen básicamente dos formas de presentar la ecuación de la recta:

† La forma General:

$$ax + by + c = 0$$

† La forma Principal:

$$y = mx + n$$

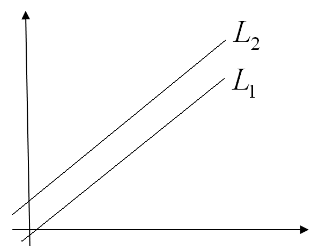
La diferencia principal que existe con la ecuación de una función lineal es que aparece el coeficiente n, conocido como *coeficiente de posición* o simplemente *intercepto*, su nombre es debido a que nos indica la posición de la recta en el plano a través del lugar que corta el eje de las ordenadas[6], mientras que la pendiente m nos dice la inclinación de la recta.

Así, de la ecuación $y = x + 5$ podemos deducir que estará inclinada en 45°, pues $m = 1$, y cortará el eje y en el punto (0, 5).

Relación entre rectas

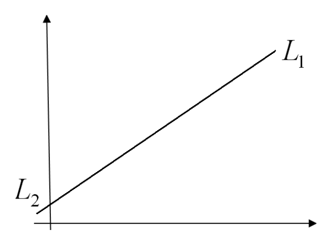
1. Rectas Paralelas

Dos rectas se dicen paralelas si ambas tienen igual pendiente, pero distinto coeficiente de posición, es decir; sean $L_1 : y = m_1x + n_1$ y $L_2 : y = m_2x + n_2$, entonces $L_1 // L_2$ si y solo si $m_1 = m_2$ y $n_1 \neq n_2$.



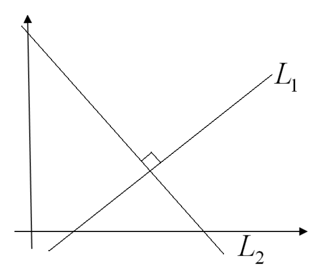
2. Rectas Coincidentes

Dos rectas se dicen coincidentes si ambas tienen igual pendiente, e igual coeficiente de posición, es decir; sean $L_1 : y = m_1x + n_1$ y $L_2 : y = m_2x + n_2$, entonces L_1 es coincidente con L_2 si y solo si $m_1 = m_2$ y $n_1 = n_2$.



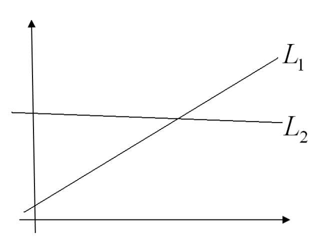
3. Rectas Perpendiculares

Dos rectas se dicen perpendiculares si el producto entre las pendientes de ambas es -1, es decir; sean $L_1 : y = m_1x + n_1$ y $L_2 : y = m_2x + n_2$, entonces $L_1 \perp L_2$ si y solo si $m_1 \cdot m_2 = -1$.



4. Rectas Secantes

Dos rectas son secantes si entre ellas no son paralelas, perpendiculares ni coincidentes, solo se cruzan.



[6] Esto es debido a que si reemplazamo $x = 0$ en la ecuación $y = mx + n$, nos da por resultado $y = n$ lo que implica que el punto $(0, n)$ pertenece a la recta

♣ **Actividad**

Determina si las siguientes rectas son paralelas (//), coincidentes, perpendiculares ($\perp$) o secantes :

1. $L_1 : y = x$ y $L_2 : y = 2x + 1$
2. $L_1 : y = x + 1$ y $L_2 : y = x + 2$
3. $L_1 : y = 2x + 5$ y $L_2 : y = -\frac{1}{2}x$
4. $L_1 : y = -x$ y $L_2 : y = x$
5. $L_1 : 2y = 10x + 4$ y $L_2 : y = 5x + 2$
6. $L_1 : y = -5x + 6$ y $L_2 : y = 3x + 2$
7. $L_1 : y = \frac{1}{3}x + 2$ y $L_2 : y = 3x - 2$
8. $L_1 : y = 6x + 1$ y $L_2 : y = -6x + 1$
9. $L_1 : 9y = 6x + 1$ y $L_2 : y = \frac{2}{3} - 2$
10. $L_1 : y = -3x - 8$ y $L_2 : y = +5x - 8$

Determinación de la Ecuación de la Recta

Para determinar la ecuación de una recta basta conocer dos puntos que pertenezcan a ella.

Supongamos que conocemos 2 puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) que pertenecen a la recta $L : y = mx + n$, entonces ambos puntos, por el hecho de pertenecer a la recta, deben satisfacer su ecuación, así tenemos:

$$\left.\begin{array}{rcl} mx_1 + n & = & y_1 \\ mx_2 + n & = & y_2 \end{array}\right|$$

Hemos formado un sistema de ecuaciones, ocupando el método de reducción[7], podemos restar ambas ecuaciones:

$$\begin{array}{rrcl} & mx_1 + n & = & y_1 \\ - & mx_2 + n & = & y_2 \\ \hline & mx_1 - mx_2 + 0 & = & y_1 - y_2 \\ & \Rightarrow m(x_1 - x_2) & = & y_1 - y_2 \end{array}$$

Y al dividir por $(x_1 - x_2)$, se tiene la fórmula para encontrar la pendiente de una recta:

$$\Rightarrow m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Luego, para encontrar el intercepto reemplazamos en cualquiera de las ecuaciones originales del sistema y de ésta manera determinamos la ecuación de una recta.

♠ Ejemplo 1

Determinemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A = (2, 3)$ y $B = (3, 4)$:

[7] Ver página 66

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{4-3}{3-2} \\ &= \frac{1}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Luego sabemos que:

$$\begin{aligned} y_1 &= mx_1 + n \\ \Rightarrow \quad 3 &= 1 \cdot 2 + n \\ 3 - 2 &= n \\ \Rightarrow \quad n &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que la ecuación buscada es:

$$y = x + 1$$

♠ Ejemplo 2

Determinemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A = (-1, 5)$ y $B = (3, 1)$:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{1-5}{3-(-1)} \\ &= \frac{-4}{4} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Luego sabemos que:

$$\begin{aligned} y_1 &= mx_1 + n \\ \Rightarrow \quad 1 &= -1 \cdot 3 + n \\ 1 + 3 &= n \\ \Rightarrow \quad n &= 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que la ecuación buscada es:

$$y = -x + 4$$

♣ **Actividad**

I. *Representa gráficamente las siguientes funciones*

1.	$y = -2x$	*5.*	$y = 3x + 3$	*9.*	$y = \frac{5x}{4}$	*13.*	$x + y = 0$
2.	$y = x + 2$	*6.*	$y = 2x - 4$	*10.*	$3y + 9x - 3 = 0$	*14.*	$5x - y = 2$
3.	$y - x - 3$	*7.*	$y = -2x + 4$	*11.*	$\frac{y}{5} = 2x + 5$	*15.*	$3y = 4x + 5$
4.	$y = x + 3$	*8.*	$y = \frac{5x-4}{2}$	*12.*	$y = 8 - 3x$	*16.*	$x = 6y - 1$

II. *Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos:*

1.	$(1,2)$ y $(3,4)$	*5.*	$(a,2a)$ y $(3a,a)$	*9.*	$(0,5)$ y $(0,16)$
2.	$(0,0)$ y $(1,1)$	*6.*	$(\frac{3}{2},5)$ y $(1,2)$	*10.*	$(5,9)$ y $(9,9)$
3.	$(1,-8)$ y $(5,3)$	*7.*	$(9,8)$ y $(-9,6)$	*11.*	$(6,6)$ y $(-5,5)$
4.	$(0,5)$ y $(3,4)$	*8.*	$(-25,3)$ y $(2,0)$	*12.*	$(-96,\frac{5}{6})$ y $(6,3)$

8.3.3. Un Poco de Geometría Analítica

Intersección Entre Rectas

Con las herramientas que ya disponemos nos será muy fácil encontrar la intersección entre dos rectas pues éste punto debe pertenecer a ambas rectas, por lo tanto debe cumplir con sus respectivas ecuaciones, de manera que si queremos encontrar el punto de intersección entre dos rectas debemos resolver el sistema que forman las ecuaciones de ambas rectas.

♠ Ejemplo:

Determinar el par ordenado donde se intersectan las rectas $L_1 : y = 2x + 3$ y $L_2 : 5y = 6x + 1$.

Respuesta:

Debemos resolver el sistema formado por éstas dos ecuaciones, de manera que:

$$\left.\begin{array}{rcl} y & = & 2x+3 \\ 5y & = & 6x+1 \end{array}\right| \cdot -3 \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} -3y & = & -6x-9 \\ 5y & = & 6x+1 \end{array}\right|$$

Ahora sumamos las nuevas ecuaciones:

$$\begin{array}{crcl} & -3y & = & -6x-9 \\ + & 5y & = & 6x+1 \\ \hline & 2y & = & 0-8 \end{array}$$

$$\Rightarrow y = -4$$

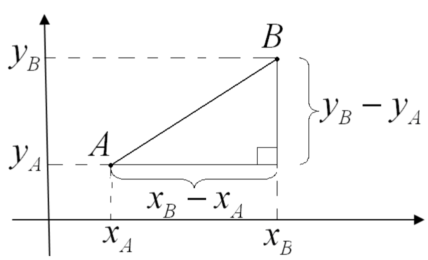
Y con el valor de y determinamos x reemplazando en cualquiera de las ecuaciones originales,

$$\begin{aligned} y &= 2x+3 \\ (-4) &= 2x+3 \\ -7 &= 2x \\ \Rightarrow x &= -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

Entonces el punto de intersección entre las rectas será $(-\frac{7}{2}, -4)$

Distancia Entre dos Puntos

Para encontrar la distancia entre dos puntos utilizamos sus coordenadas cartesianas para formar un triángulo rectángulo, donde la hipotenusa representa las distancia entre los puntos y sus catetos los encontramos con la diferencia entre las coordenas x y las y de los puntos en cuestión, como lo indica la figura:



De manera que la distancia (d) entre A y B será determinada por el teorema de Pitágoras de la forma:

$$d^2 = (y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{d = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}}$$

♠ Ejemplo:

Determinar la distancia entre los puntos (4,2) y (1,6):

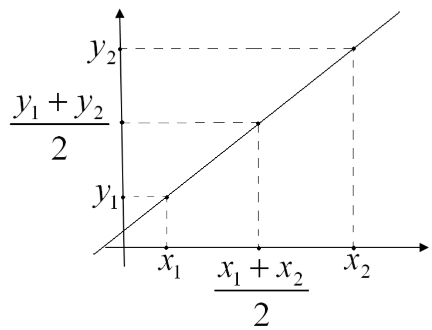
Respuesta:

Reemplazamos los valores en la fórmula de manera que:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(6-2)^2 + (1-4)^2} \\ d &= \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} \\ d &= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} \\ d &= 5 \end{aligned}$$

Punto Medio

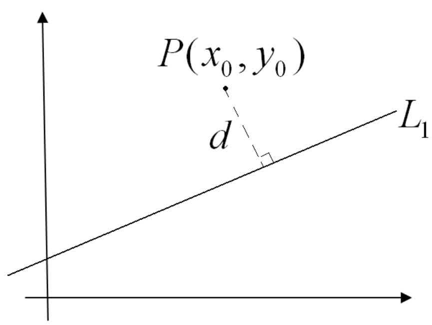
Sean dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en el plano, entonces el punto medio del segmento que une a dichos puntos queda determinado por:



Punto medio $=(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$.

Distancia entre un Punto y una Recta

Sea el punto $P(x_0, y_0)$ y la recta $L_1 : ax + by + c = 0$, entonces la distancia entre P y L_1 ($d(P, L_1)$) está determinada por:



$$d(P, L_1) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

8.3.4. Función Cuadrática y la Parábola

Las funciones cuadráticas son todas aquellas que están determinadas por una ecuación de segundo grado, de la forma:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

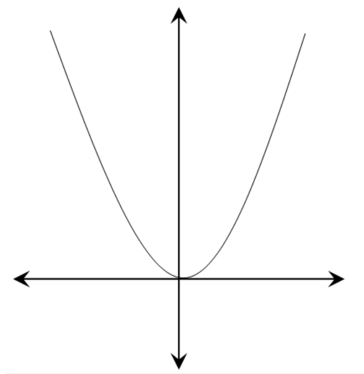
Con a, b y $c \in \mathbb{R}$, y por supuesto con $a \neq 0$, de lo contrario estaríamos en presencia de una función afín. La representación gráfica de una función cuadrática se denomina **parábola**.

Características de la parábola

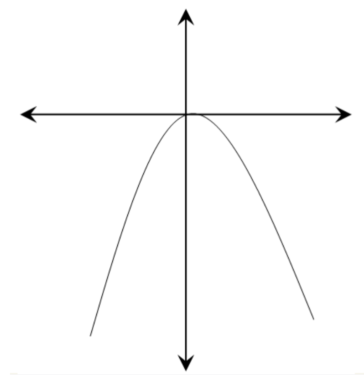
La forma de la parábola está totalmente determinada por los coeficientes de la función cuadrática a, b y c.

El coeficiente a, que acompaña al x^2, determinara si las ramas de la parábola van hacia arriba o hacia abajo, es decir:

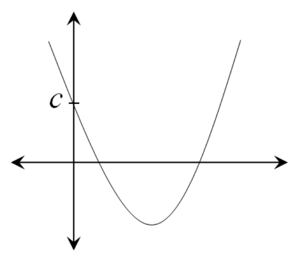
Si $a > 0$, la parábola estará contenta



Si $a < 0$, la parábola estará triste



El coeficiente c , el que no tiene x, cumple la misma labor que n en la función afín, es conocido como intercepto, pues es el valor por donde la parábola atraviesa el eje y, es decir:



Los lugares por donde la parábola atravesará el eje de las abscisas o eje x, serán los puntos donde la función sea 0, pues recordemos que los puntos sobre el eje x tienen coordenada y igual a cero, por lo tanto debemos encontrar que valores de x cumplen que:

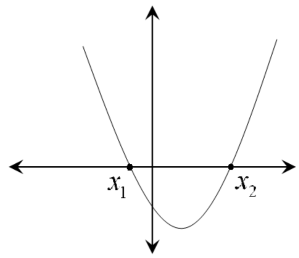
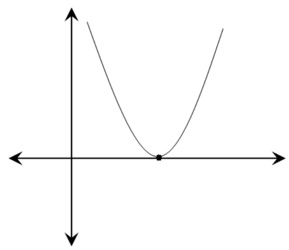
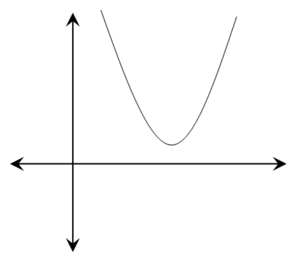
$$f(x) = 0$$

O lo que es igual:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Y esos valores de x son precisamente las raices de la ecuación de segundo grado que determina a la función. Sin embargo éstas raices no siempre existen, o a veces solo existe una, en el primer caso la parábola nunca corta el eje x, y en el segundo lo toca una sola vez. Recordemos que la cantidad de raices de una ecuación de segundo grado viene dado por su discriminante[8], por lo tanto se tiene que:

[8] Ver sección 5.3.3

Si $\Delta > 0$, la ecuación tendrá dos raices, es decir, corta dosveces el eje x precisamente por las dos soluciones de la ecuación.	
Si $\Delta = 0$, la ecuación tendrá una raíz, es decir, toca una sola vez al eje x sobre la única solución de la ecuación.	
Si $\Delta < 0$, la ecuación no tendrá raices, por lo tanto no toca nunca al eje x.	

Otra parte importante de la parábola es el punto donde cambia de dirección, conocido como *vértice*, para encontralo podemos aprovechar el hecho de que la parábola es simétrica, por lo tanto podemos encontrar la componente x del vértice (llamémosla x_v) fácilmente ya que ésta está justo entre las raíces de la ecuación cuadrática. Por lo tanto podemos encontrarla promediando las raices:

$$\begin{aligned} x_v &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ &= \frac{(-\frac{b}{a})}{2} \\ \Rightarrow \quad x_v &= -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

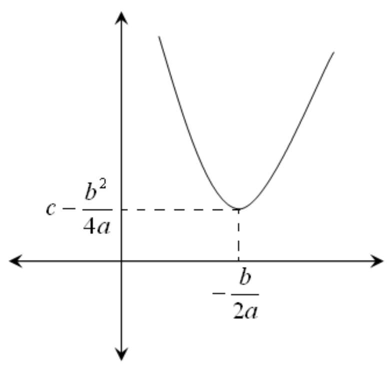
Luego para encontrar la componente y del vértice (llamémosla y_v) reemplazamos x_v en la función:

$$\begin{aligned}
y_v &= f(x_v)\\
&= a{x_v}^2 + bx_v + c\\
&= a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c\\
&= a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c\\
&= \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + c\\
&= \frac{b^2-2b^2}{4a} + c\\
\Rightarrow \quad y_v &= c - \frac{b^2}{4a}
\end{aligned}$$

Así, las coordenadas del vértice de una parábola de ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$ serán:

$$(x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

lo que se vería gráficamente:



◊ *Observa que . . .*

† *Si $b = 0$, el eje y es el eje de simetría de la parábola.*

† *Si $a > 0$ y $b > 0$, el vértice de la la parábola se encontrará a la izquierda del eje y, pues $-\frac{b}{2a} < 0$.*

† *Si $a > 0$ y $b < 0$, el vértice de la la parábola se encontrará a la derecha del eje y., pues $-\frac{b}{2a} > 0$.*

† *Si $a < 0$ y $b < 0$, el vértice de la la parábola se encontrará a la izquierda del eje y., pues $-\frac{b}{2a} < 0$.*

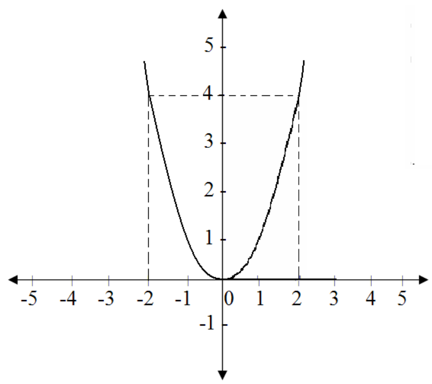
† *Si $a < 0$ y $b > 0$, el vértice de la la parábola se encontrará a la derecha del eje y., pues $-\frac{b}{2a} > 0$.*

Ejemplos de funciones cuadráticas :

♠ Ejemplo 1

Grafiquemos la función $y = x^2$; debemos dar valores a x, para calcular los valores de y para poder ubicarlos en el plano cartesiano.

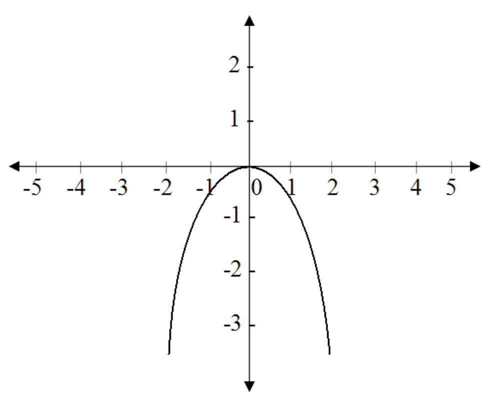
x	y
-4	16
-3	9
-2	4
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
$\vdots$	$\vdots$



♠ Ejemplo 2

Grafiquemos la función $y = -x^2$; de la misma manera debemos asignar arbitrariamente valores convenientes de x para encontrar los correspondientes de y y luego graficarlos en el plano cartesiano:

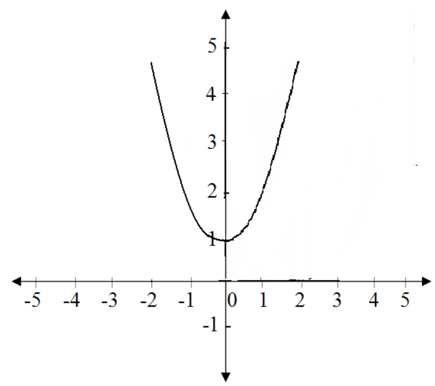
x	y
-4	-16
-3	-9
-2	-4
0	0
1	-1
2	-4
3	-9
4	-16
$\vdots$	$\vdots$



♠ Ejemplo 3

Grafiquemos la función $y = x^2 + 1$;

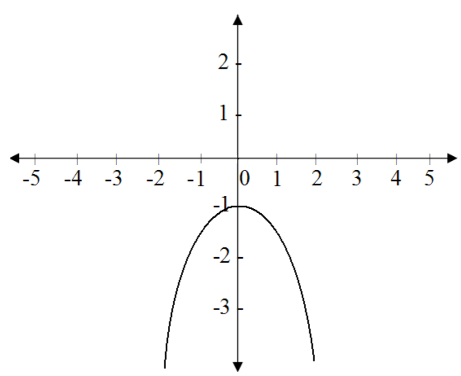
x	y
-4	17
-3	10
-2	5
0	1
1	2
2	5
3	10
4	17
⋮	⋮



♠ Ejemplo 4

Grafiquemos la función $y = -x^2 - 1$;

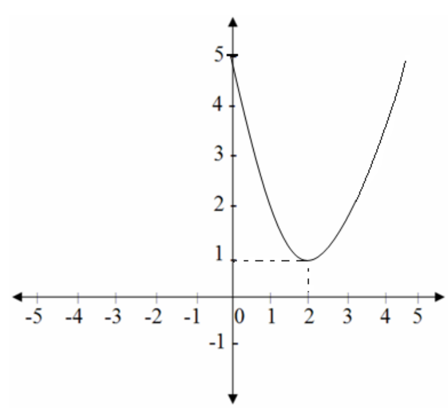
x	y
-4	-17
-3	-10
-2	-5
0	-1
1	-2
2	-5
3	-10
4	-17
⋮	⋮



♠ Ejemplo 5

Grafiquemos la función $y = x^2 - 4x + 5$;

x	y
-1	10
0	5
1	2
2	1
3	2
4	5
5	10
6	17
⋮	⋮



♣ **Actividad**

Representa gráficamente las siguientes funciones, determinando la concavidad, el intercepto con el eje y ,el vertice y los cortes sobre el eje x.

1. $f(x) = x^2 + 3x - 4$	4. $f(x) = x^2 + 2x - 8$	7. $f(x) = x^2 - 8x + 16$
2. $f(x) = x^2 + 3x + 2$	5. $f(x) = x^2 - 2x - 8$	8. $f(x) = x^2 + 4x + 4$
3. $f(x) = x^2 - 5x + 6$	6. $f(x) = x^2 - 9$	9. $f(x) = 2x^2 - 9x + 7$

8.3.5. Función Valor Absoluto

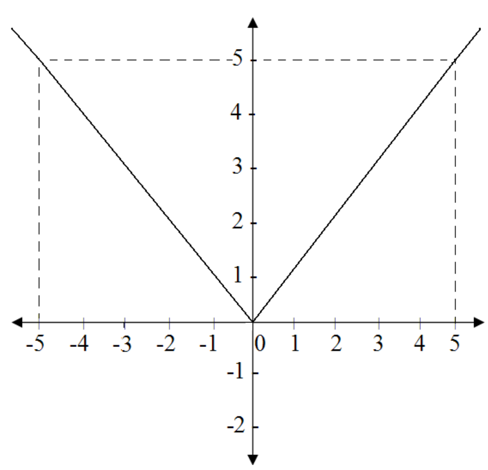
La función valor absoluto (se abrevia utilizando el signo $|x|$ y se lee "valor absoluto de x"), es aquella que a cada número real le asigna su mismo valor pero sin considerar su signo, de esta manera al 1 lo lleva al 1, al 5 lo lleva al 5, pero al número -3 lo llevará al 3 y al -100 lo llevará al 100. Dicho de otra manera, a todos los números positivos más el 0 los deja igual, y a los negativos les cambia el signo.

Dicho matemáticamente:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{Si } x \geq 0 \\ -x & \text{Si } x < 0 \end{cases}$$

Representemos gráficamente esta función, para hacerlo, demosle valores a x y asignémosle los valores correspondientes de y.

x	$\|x\|$
-5	5
-4	4
-3	3
-2	2
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
$\vdots$	$\vdots$



Esta función no es inyectiva, ya que por ejemplo al número 5 del recorrido llegan los números 5 y -5 del dominio. Tampoco es sobreyectiva pues todos los valores negativos del codominio quedan sin preimagen.

♣ ***Actividad***

Representa gráficamente las siguientes funciones:

1. $f(x) = |x+1|$
2. $f(x) = |x|+1$
3. $f(x) = |x-2|$
4. $f(x) = |x|-2$
5. $f(x) = -|x|$
6. $f(x) = 2|x|$
7. $f(x) = |2x|$
8. $f(x) = |x^2|$
9. $f(x) = |x|^2$

8.3.6. Función Parte Entera

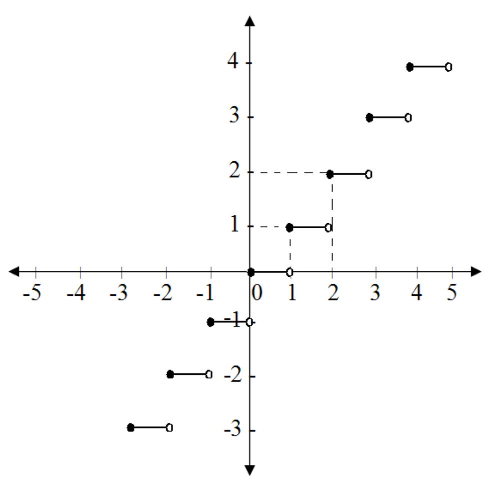
La función parte entera (se abrevia utilizando el signo $\lfloor x \rfloor$ y se lee “la parte entera de x”) es una función de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pero su recorrido es $\mathbb{Z}$, y es aquella que a cada número real le asocia el número entero más cercano que éste hacia su izquierda en la recta numérica, de esta manera al 1 lo lleva al 1, pues ese número ya es entero, al 6,8 lo lleva al 6, al 10,3 al 10 y en general a todos los números positivos solo les quita su parte decimal (si es que la tiene), pero éste no es el caso de los números negativos, pues por ejemplo, el entero más cercano a la izquierda de $-4{,}2$ es el número -5 y del $-0{,}2$ es el -1. Es decir:

$$\lfloor x \rfloor = z_x$$

Tal que z_x sea el número entero más grande que cumpla que $z_x \leq x$.

Veamos el gráfico de ésta función:

x	$\lfloor x \rfloor$
-5	-5
-4,5	-5
-3,1	-4
-1,1	-2
$-\frac{1}{2}$	-1
0	0
0,99	0
1	1
2,5	2
3	3
3,5	3
⋮	⋮



♣ ***Actividad***

Grafica las siguientes funciones:

1. $f(x) = \lfloor x \rfloor + 1$
2. $f(x) = \lfloor x+1 \rfloor$
3. $f(x) = \lfloor x \rfloor - 3$
4. $f(x) = \lfloor x-3 \rfloor$
5. $f(x) = \lfloor 3x \rfloor$
6. $f(x) = 3\lfloor x \rfloor$
7. $f(x) = \lfloor 2x+1 \rfloor$
8. $f(x) = 2\lfloor x \rfloor + 1$
9. $f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$

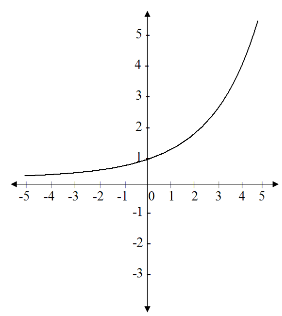
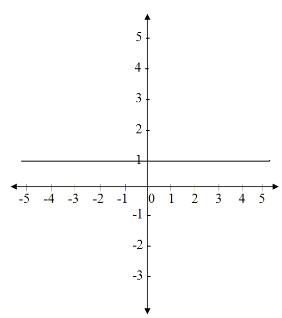
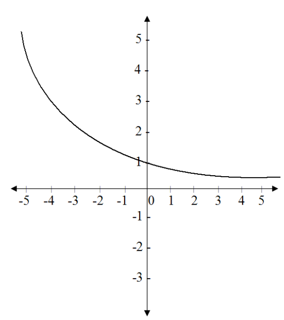
8.3.7. Función Exponencial

La función exponencial se define de la forma:

$$f(x) = a^x \qquad \text{con } a > 0$$

También la podemos escribir como $\exp_a(x)$. Es una función inyectiva.

El valor de a determinará por completo la forma de la gráfica de la función.

Si $a > 1$, la función será creciente, pues todo número mayor que uno si se multiplica por sigo mismo aumenta.	
Si $a = 1$, la función será constante, pues 1 elevado a cualquier número real, siempre es 1.	
Si $a \in]0,1[$, la función será decreciente, por ejemplo si $a = \frac{1}{2}$, $a^2 = 1/4$ que es menor que $1/2$.	

♣ *Actividad*

Grafica las siguientes funciones exponenciales:

1. $f(x) = 2^x$	*4.* $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$	*7.* $f(x) = \lfloor 2x + 1 \rfloor$
2. $f(x) = 3^x$	*5.* $f(x) = (2^x)^2$	*8.* $f(x) = \lfloor x \rfloor^x$
3. $f(x) = 2{,}5^x$	*6.* $f(x) = \lfloor 1{,}96 \rfloor^x$	*9.* $f(x) = (\lvert 5^x \rvert)^2 + 1^x$

8.3.8. Función Logaritmo

Una función logaritmo es una función definida de la forma:

$$f(x) = \log_a(x) \quad \text{siendo } a \text{ un número fijo, positivo y distinto de 1}$$

Recordemos que los logaritmos NO están definidos para los números negativos[9], por lo que el dominio de ésta función no debe ser $\mathbb{R}$, mas bien, debe ser $\mathbb{R}^+$.

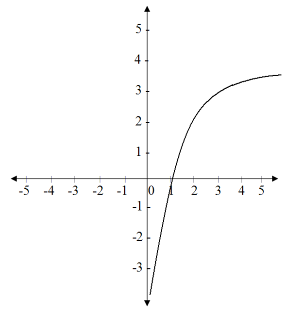
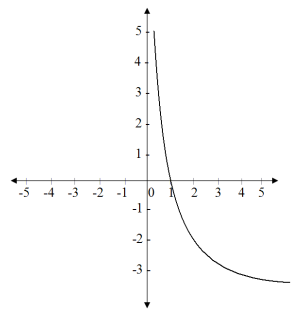
♢ *Observa que . . .*

Si consideramos a la función exponencial una función de $\exp_a(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *entonces podemos decir que la función* $\log_a(x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *es su inversa, pues:*

$$\begin{aligned} \log_a(\exp_a(x)) &= \log_a(a^x) \\ &= x \cdot \log_a a \\ &= x \cdot 1 = x \end{aligned}$$

Su composición genera la identidad.

El gráfico de la función logaritmo va a ser muy distinto según el valor de la base, pues:

Si $a > 1$, la función $\mathcal{J}$ será creciente, sin embargo a medida que avanza en la recta numérica crece cada vez más "lento".	
Si $a \in]0,1[$, la función será decreciente, sin embargo a medida que avanza en la recta numérica la gráfica decrece más "lento".	

8.4. Mini Ensayo VIII Funciones

1. Si $f(x) = 3^{x+2}$, entonces $f(x+2) - f(x)$ es igual a:

   a) 3^2
   b) 3^4
   c) $72 \cdot 3^x$
   d) 3^{2x+6}
   e) 3^6

2. Sea $f(x) = \frac{4^{2x} - 4^{2x+3}}{63 \cdot 4^x}$, entonces el valor de a para que $f(a) = -4$ es:

   a) -1
   b) $-1/2$
   c) $-1/4$
   d) $-1/8$
   e) 1

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x-2}{3x+12}$, el dominio y el recorrido de f son respectivamente:

   a) $\mathbb{R} - \{-4\}; \mathbb{R} - \{2\}$
   b) $\mathbb{R} - \{4\}; \mathbb{R} - \{2\}$

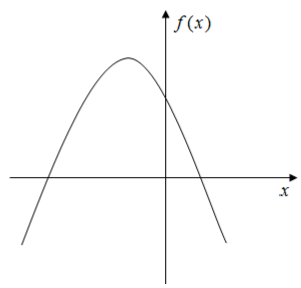
c) $\mathbb{R} - \{-4\}; \mathbb{R} - \{1/3\}$
d) $\mathbb{R} - \{4\}; \mathbb{R} - \{1/3\}$
e) $\mathbb{R}; \mathbb{R}$

4. Si $g(x) = x^2 + 1$ y $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, entonces $(g \circ f)(x)$ es:

a) 1
b) $\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}$
c) $x^2 + 1$
d) $x^2 - 1$
e) $\frac{x^4+(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2}$

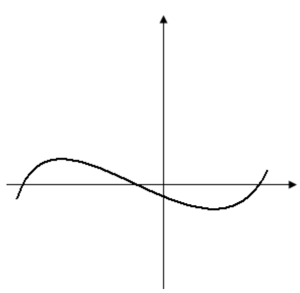
5. La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ está graficada en el dibujo adjunto, según ésto, es verdadero que:

a) $a < 0; b < 0; c > 0$
b) $a < 0; b > 0; c > 0$
c) $a > 0; b < 0; c > 0$
d) $a < 0; b > 0; c < 0$
e) $a < 0; b < 0; c < 0$

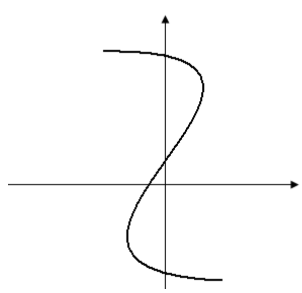


6. Cuál de los siguientes gráficos representa una función?

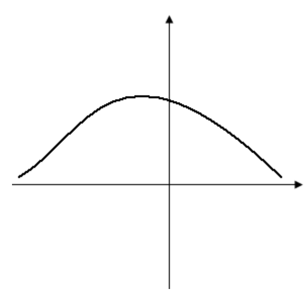
I.



II.



III.



a) Solo II
b) I y III
c) Solo III
d) Solo I
e) Todos

7. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos (3,5) y (4,8)?

   a) $y + 3x = 2$
   b) $y - 3x = -4$
   c) $y - 3x = 1$
   d) $3y - x = 2$
   e) $y + x = 1$

8. Si $f(x) = x^2 - 3$ y $h(z) = z + 4$, entonces el valor de $3f(-1) + 5h(2)$ es:

   a) 24
   b) 36
   c) -6
   d) 30
   e) No se puede calcular.

9. ¿Para que valor de k, la parábola $f(x) = 2x^2 + 3x + k$ no intersecta el eje de las abscisas?

   a) Para ningún valor de k
   b) $k > 0$
   c) $k > \frac{8}{9}$
   d) $k > -1$
   e) $k > \frac{9}{8}$

10. Cual debe ser el valor de p en la ecuación de la recta $L_1 : px + (p+1)y = 18$, para que sea paralela a la recta L_2 cuya ecuación es $4x + 3y + 7 = 0$

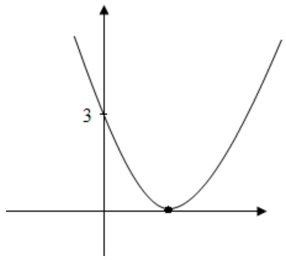
   a) 4
   b) 0,75
   c) -4
   d) 0,25
   e) $-4/3$

11. Si $h(x) = x^2 - 4$, $t(x) = x - 6$ y $p(x) = \frac{t(x)}{h(x)}$, entonces $p(-2)$ es:

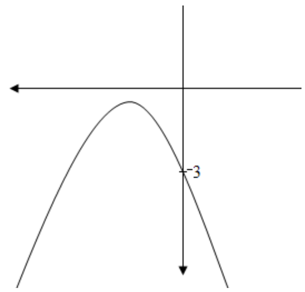
   a) -1
   b) 0
   c) 1
   d) 8
   e) $-2 \notin Dom(p)$

12. A la función $f(x) = -x^2 - 3x - 3$ le corresponde el gráfico:

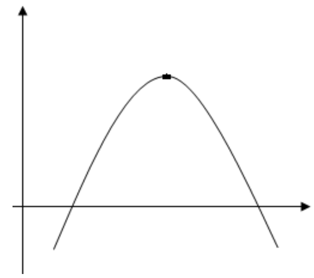
a)



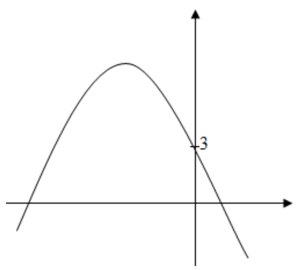
b)



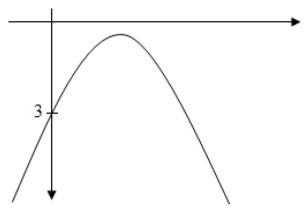
c)



d)



e)



13. Sean las rectas $L_1 : y = x+1$ y $L_2 : y = 2x-1$, entonces cual de las siguientes afirmaciones es verdadera:

    I. L_1 y L_2 son paralelas
    II. L_1 y L_2 son perpendiculares
    III. L_1 y L_2 se intersectan en el punto (2,3)
    IV. L_1 y L_2 son secantes

    a) Solo I
    b) II y III
    c) III y IV
    d) Solo IV
    e) Solo III

14. ¿Cuál de los siguientes puntos NO pertenece al gráfico de la función $h(x) = 4 - x^2$

    a) (3,-5)
    b) (1,4)
    c) $(-1, 3)$
    d) $(\sqrt{2}, 2)$
    e) (1,3)

15. El vértice de la parábola $y = -3x^2$ es:

    a) (0,3)

b) (0,0)
c) $(0, -3)$
d) $(-3, 0)$
e) (3,0)

3. ¿Cuál debe ser el valor de t para que el gráfico de la parábola $y = 7x^2 - 4x + 2t - 10$ pase por el punto (1,1)?

   a) 1
   b) -4
   c) 4
   d) -6
   e) 5