Capítulo 9

Geometría Plana

La palabra geometría tiene sus raíces en la composición de las palabras "*geo*" que significa tierra, y la palabra "*metrein*" que significa medida, por lo tanto en su significado más literal geometría es "*medida de la tierra*".

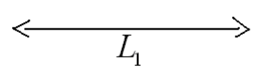
La geometría es la rama de la matemática que se ocupa del estudio de figuras geométricas, sus propiedades, y relaciones que cumplen sus distintas partes.

9.1. Conceptos Primitivos de la Geometría

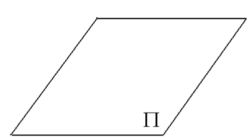
Punto : Según Euclides, un punto es un objeto sin dimensión, es decir, no tiene largo, no tiene angho, ni alto. En la PSU te bastará saber que un punto se representa por letras mayúsculas.

$$\bullet A$$

Recta : Al igual que el punto se dice que una recta es un objeto matemático con una dimensión, solo tiene largo. Generalmente la representamos con una letra L acompañada de un subíndice.



Plano : Su característica es tener dos dimensiones, largo y alto, generalmente se designa con letras griegas mayúsculas, por ejemplo Π, Φ, Θ, etc.



9.1.1. Axiomas Principales de la Geometría Euclidiana

† En todo plano existen infinitos puntos.

† Por un punto pasan infinitas rectas.

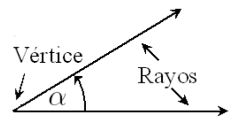
† Por dos puntos pasa sólo una recta.

† Todo plano posee al menos 3 puntos no colineales (no los podemos unir a través de una sola recta).

† Si dos puntos de una recta están en un plano, entonces la recta está en el plano.

9.2. Ángulos

Ángulo: Es la abertura comprendida entre dos rayos, llamados lados que parten de un mismo punto denominado vértice.



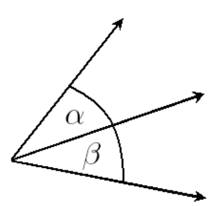
9.2.1. Clasificación de los Ángulos según su medida

Sea α un ángulo cualesquiera.

- Ángulo nulo α=0°
- Ángulo agudo $0° < \alpha < 90°$
- Ángulo recto α=90°
- Ángulo obtuso $90° < \alpha < 180°$
- Ángulo extendido α=180°
- Ángulo completo α=360°

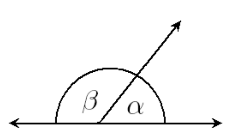
9.2.2. Clasificación de los Ángulos según su posición

Ángulos Consecutivos : Tienen el vértice, origen, y un lado en común.



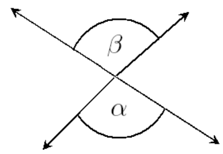
α y β son consecutivos

Ángulos Adyacentes : Tienen el vértice en común y los otros dos lados pertenecen a la misma recta. Los ángulos son suplementarios.



α y β son adyacentes

Ápuestos por el Vértice : Tienen el vértice en común, y los lados de uno son las prolongaciones de los lados del otro. Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.



α y β son opuestos

por el vértice

9.2.3. Clasificación de los ángulos de acuerdo a la suma de sus medidas

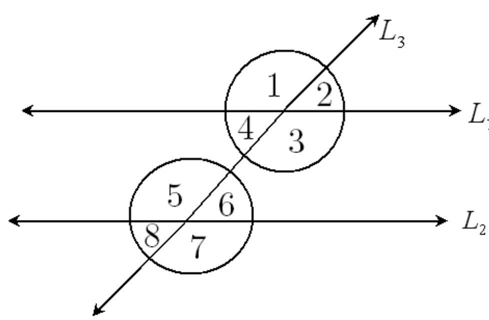
Ángulos Complementarios : Son dos ángulos que sumados dan 90°, si α y β son complementarios, entonces α es el complemento de β y β es el complemento de α.

El complemento de un ángulo cualesquiera x es: $90° - x$.

Ángulos Suplementarios : Son dos ángulos que sumados dan 180°, si α y β son suplementarios, entonces α es el suplemento de β y β es el suplemento de α.

El suplemento de un ángulo cualesquiera x es: $180° - x$.

9.2.4. Ángulos formados por dos paralelas cortadas por una secante o transversal



Ángulos Alternos : Los ángulos alternos entre paralelas tienen la misma medida. Están los ángulos:

- Alternos Internos: $\measuredangle 3 = \measuredangle 5$; $\measuredangle 4 = \measuredangle 6$
- Alternos Externos: $\measuredangle 1 = \measuredangle 7$; $\measuredangle 2 = \measuredangle 8$

Ángulos Correspondientes : Los ángulos correspondientes entre paralelas tienen la misma medida. Estos son:

- $\measuredangle 1 = \measuredangle 5$; $\measuredangle 2 = \measuredangle 6$; $\measuredangle 3 = \measuredangle 7$; $\measuredangle 4 = \measuredangle 8$

Ángulos Colaterales : Los ángulos colaterales entre paralelas suman 180°. Están los ángulos:

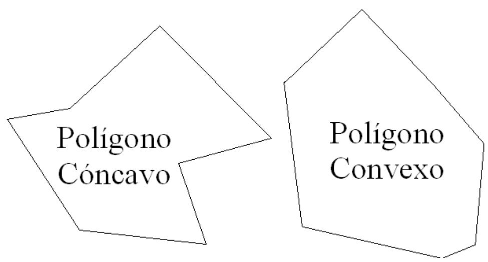
- Colaterales Internos: $\measuredangle 4$ con $\measuredangle 5$; $\measuredangle 3$ con $\measuredangle 6$
- Colaterales Externos: $\measuredangle 1$ con $\measuredangle 8$; $\measuredangle 2$ con $\measuredangle 7$

◇ *Observa que...*

- *Bisectriz de un Ángulo: Es el rayo que divide al ángulo, en dos ángulos congruentes (de igual medida).*
- *Rectas Perpendiculares: Son dos rectas que al cortarse forman un ángulo de 90°*

9.3. Polígonos

Se llama polígono a la porción de plano limitada por una curva cerrada, llamada línea poligonal. Existen polígonos cócavos y convexos.



9.3.1. Polígono Regular

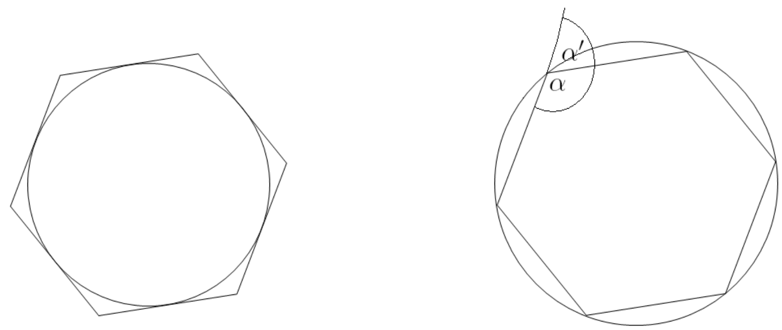
Polígono regular, es aquel que tiene sus lados y sus ángulos respectivamente congruentes.

Nombre de Polígonos

Número de lados	**Nombre**
tres	triángulo
cuatro	cuadrilátero
cinco	pentágono
seis	hexágono
siete	heptágono
ocho	octágono
nueve	eneágono
diez	decágono
once	endecágono
doce	dodecágono
quince	pentadecágono
veinte	icoságono

Propiedades

Sea α ángulo interior.
Sea α' ángulo exterior.
Sea n número de lados.



1. La suma de los ángulos exteriores de cualesquier polígono es $360°$.
2. A todo polígono regular se le puede inscribir una circunferencia.
3. Todo polígono regular se puede circunscribir en una circunferencia.
4. Diagonales que se pueden trazar desde un vértice: $n - 3$.
5. Total de diagonales que se pueden trazar: $\frac{n}{2}(n-3)$.
6. $\alpha = \frac{(n-2)180°}{n}$
7. $\alpha' = \frac{360°}{n}$

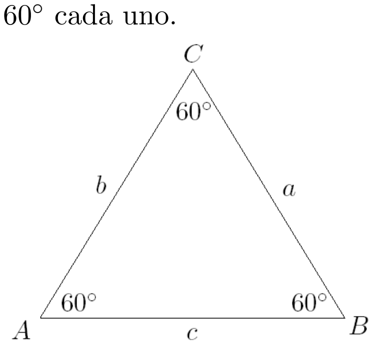
9.4. Triángulos

Triángulo es la porción de plano limitado por tres rectas que se cortan dos a dos.

9.4.1. Clasificación de los Triángulos

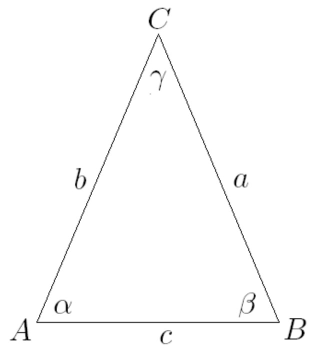
1. **Según sus lados:**

   Triángulo Equilátero : Tienes los tres lados iguales, por ende sus tres ángulos son de igual medida, $60°$ cada uno.



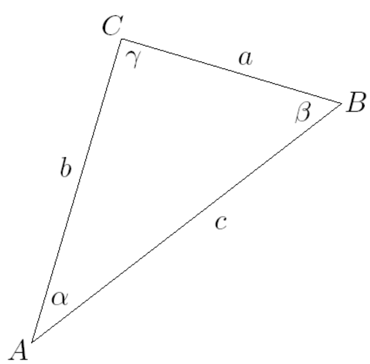
$a = b = c$

Triángulo Isósceles : Tiene dos lados iguales y uno distinto al cual se le denomina **base**. Por tener dos lados iguales, tiene dos ángulos iguales ubicados en la base llamados ángulos basales.



$$a = b$$
$$\alpha = \beta$$

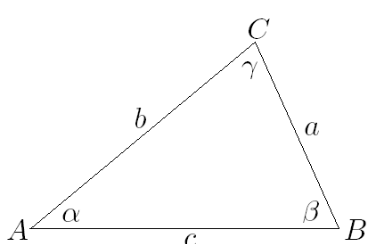
Triángulo Escaleno : Tiene sus tres lados distintos, y por lo tanto sus tres ángulos distintos.



$$a \neq b \neq c$$
$$\alpha \neq \beta \neq \gamma$$

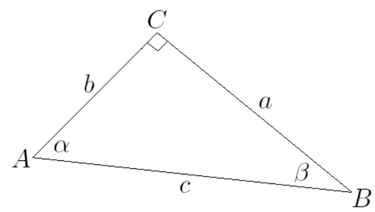
2. **Según sus ángulos:**

Triángulo Acutángulo : Tiene sus tres ángulos agudos, miden menos 90°. Como todos sus ángulos interiores son agudos, todos sus ángulos exteriores son obtusos.



$$\alpha, \beta \text{ y } \gamma < 90^\circ$$

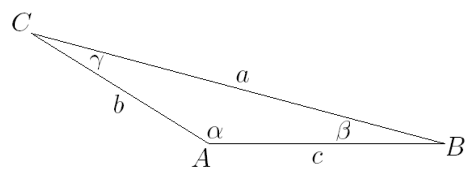
Triángulo Rectángulo : Tiene un ángulo recto. Los otros dos ángulos son agudos y deben sumar 90°. Los lados que forman el ángulo de 90° se llaman **catetos** y el opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa**.



a y b catetos

c hipotenusa

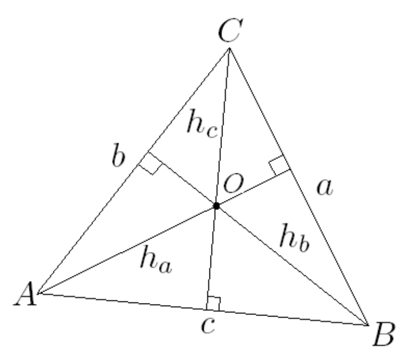
Triángulo Obtusángulo : Tiene un ángulo obtuso, mayor a 90°. Sus otros dos ángulos son agudos.



$\alpha > 90°$

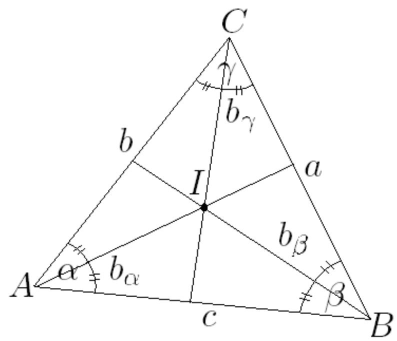
9.4.2. Altura

- Es la perpendicular trazada desde un vértice, al lado opuesto o a su prolongación.
- Hay tres alturas una correspondiente a cada lado.
- Se designan con la letra que indica el lado: h_a, h_b, h_c.
- El punto de concurrencia de las tres alturas se llama **ortocentro**, el punto O.



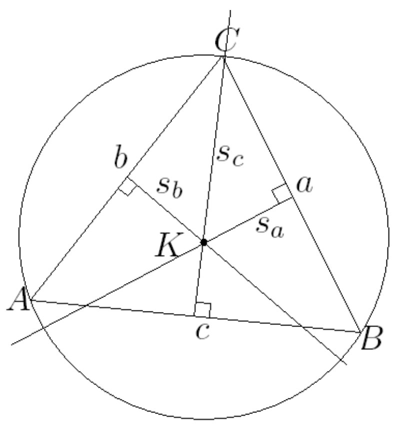
9.4.3. Bisectriz

- Es el rayo que divide al ángulo en dos ángulo de igual medida.
- Hay tres bisectrices, una para cada ángulo.
- Se designan según el ángulo: b_α, b_β, b_γ
- El punto de concurrencia de la tres bisectrices se llama **incentro**, el punto I.



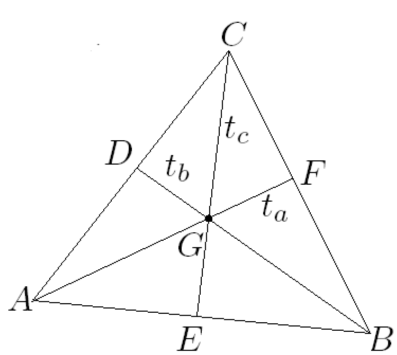
9.4.4. Simetral o Mediatriz

- Es la perpendicular que pasa por el punto medio de cada lado.
- Hay tres simetrales o mediatrices.
- Se designan la letra que indica el lado: S_a ó M_a, S_b ó M_b, S_c ó M_c.
- El punto de intersección de las tres simetrales o mediatrices se llama **circuncentro**, el punto K. Recibe este nombre ya que al inscribir el triángulo en una circuferencia el circuncentro coincide con el centro de ésta.



9.4.5. Transversal de Gravedad

- Es el segmento que une el punto medio de un lado con vértice del lado opuesto.
- Hay tres transversales de gravedad correspondientes a cada lado.
- Se designan con la letra que indica el lado: t_a, t_b, t_c.
- El punto de intersección de la tres medianas se llama **baricentro**, el punto G.



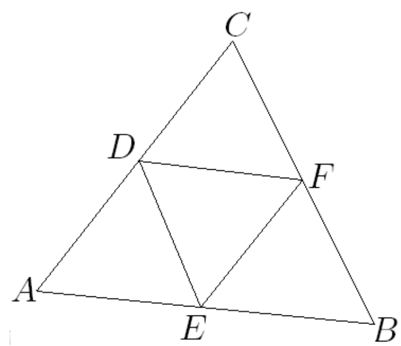
9.4.6. Mediana

- Son los segmentos que unen los puntos medios de dos lados.

- Cada mediana es paralela al lado opuesto y su medida es igual a la mitad de la medida de ese lado.

- Se designan: $m_{\overline{ED}}$, $m_{\overline{EF}}$, $m_{\overline{DF}}$.

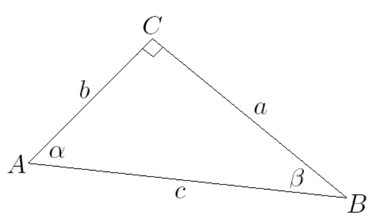
- Hay tres medianas y estas no concurren (no se intersectan).



9.4.7. Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo se cumple que:

La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

9.5. Mini Ensayo IX Ángulos y Triángulos

1. Para la figura se cumple que:

I. $\alpha + \beta + \gamma = 2(x + y + z)$

II. $\alpha - z = y$

III. y es suplemento de $(x + z)$

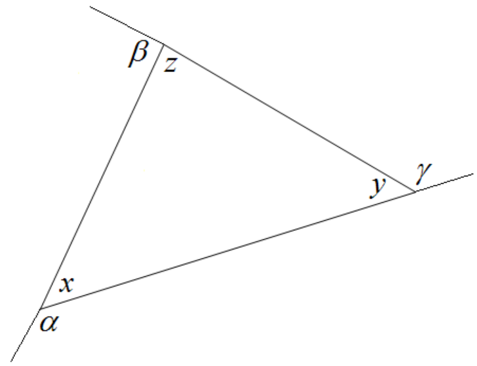
a) I y III

b) II y III

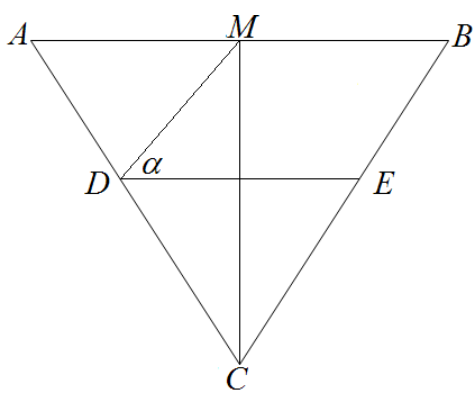
c) I y II

d) Todas

e) Ninguna



2. En la figura, el $\triangle ABC$ es isóceles de base $\overline{AB}$, $\overline{CM}$ es transversal de gravedad, $\overline{DE}$ es mediana del $\triangle ABC$. Si $\measuredangle MCB = 25°$, entonces $\alpha =$



a) 25°

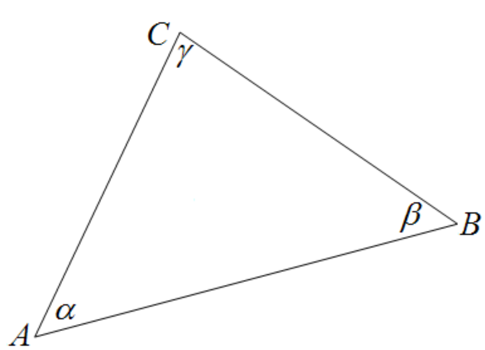
b) 40°

c) 45°

d) 65°

e) 75°

3. En la figura, $\alpha + \beta = \gamma$ y $\alpha = 2\beta$, entonces los ángulos α, β y γ miden respectivamente:



a) $60°; 30°; 90°$

b) $90°; 60°; 30°$

c) $30°; 60°; 90°$

d) $45°; 45°; 90°$

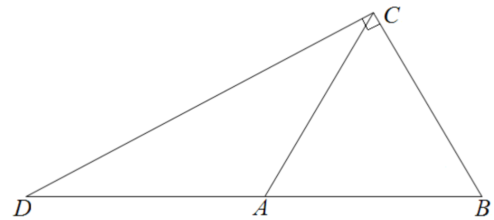
e) $120°; 60°; 180°$

4. En la figura, el $\triangle ABC$ es equilátero y el $\measuredangle DCB$ es recto en C, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I. $2\overline{AB} = \overline{DA} + \overline{AC}$

II. $\triangle DAC$ es isósceles.

III. $\overline{DC}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{BC}^2$



a) I y II

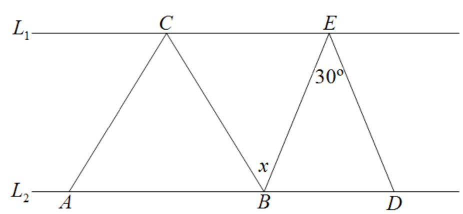
b) I y III

c) II y III

d) I, II y III

e) Ninguna de ellas.

5. Sobre dos rectas paralelas (L_1 y L_2), se han dibujado dos triángulos como se indica en la figura, el $\triangle ABC$ es equilátero y el $\triangle BDE$ es isósceles de base $\overline{BD}$, ¿cuánto mide $\measuredangle x$?



a) 30°

b) 45°

c) 50°

d) 60°

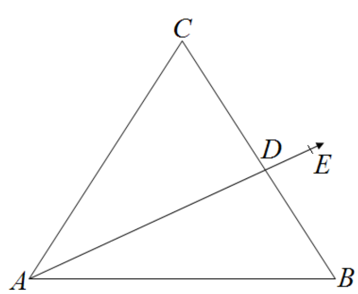
e) 75°

6. En el $\triangle ABC$ de la figura, $\overline{AD}$ es bisectriz del $\measuredangle CAB = 70°$ y $\measuredangle ABC = \measuredangle CAB - 10°$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I. $\measuredangle EDB - 10° = \measuredangle CDE$

II. $\measuredangle CAE + 15° = \measuredangle ACB$

III. $\measuredangle CAB + 10° = \measuredangle ABC$



a) Solo I

b) I y II

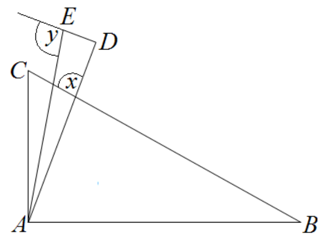
c) I y III

d) II y III

e) I, II y III

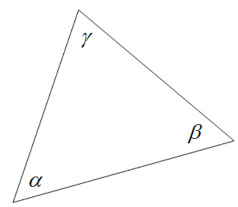
7. El $\triangle ABC$ y el $\triangle ADE$ son rectángulos en A y en D respectivamente, $\measuredangle ABC = 40°$, $\measuredangle BAD : \measuredangle ABC = 2 : 1$ y $\overline{AE}$ es bisectriz del $\measuredangle CAD$, entonces $\measuredangle x + \measuredangle y =$

a) 155°
b) 195°
c) 145°
d) 210°
e) 215°



8. ¿Qué tipo de triángulo es el de la figura si se verifica que $\beta = 2\alpha$ y $\gamma = \alpha + \beta$

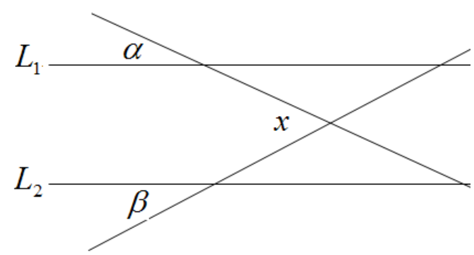
a) Equilátero
b) Isósceles
c) Escaleno
d) Rectángulo
e) c) y d) al mismo tiempo.



9. Si $L_1 /\!/ L_2$. Determinar el ángulo x de la figura.

(1) $\alpha = 60°$
(2) $\beta = 60°$

a) (1) por si sola.
b) (2) por si sola.
c) Ambas juntas (1) y (2)
d) Cada una por si sola (1) ó (2)
e) Se requiere información adicional.



10. Sean $\measuredangle\alpha$, $\measuredangle\beta$ y $\measuredangle\gamma$ los tres ángulos interiores de un triángulo isósceles, si $\measuredangle\alpha = 80°$ y $\measuredangle\beta = 50°$, entonces γ puede ser:

a) 80°
b) 50°
c) 80° o 50°
d) 650°
e) Falta información.

11. ¿Cuánto mide el suplemento de un ángulo a?

(1) El complemento de a es $55°$

(2) $a < 90°$

a) (1) por si sola.

b) (2) por si sola.

c) Ambas juntas (1) y (2)

d) Cada una por si sola (1) ó (2)

e) Se requiere información adicional.

9.6. Cuadriláteros

Es un polígono de cuatro lados. Se dividen en paralelógramos, trapecios y trapezoides.

9.6.1. Paralelógramos

Tienen dos pares de lados opuestos paralelos. Se clasifican en:

- **Paralelógramos Rectos**: Sus ángulos interiores son rectos. Estos son:
  - cuadrado
  - rectángulo.
- **Paralelógramos Oblicuos**: Sus ángulos interiores no son rectos, Estos son:
  - rombo
  - romboide.

Propiedades de todo paralelógramo:

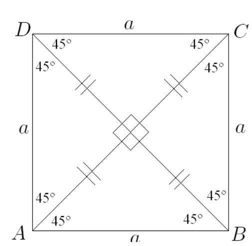
1. Lados opuestos congruentes
2. Ángulos opuestos congruentes
3. Ángulos consecutivos suplementarios
4. Las diagonales se dimidian

⋆ **Si un cuadrilátero cumple con una de estas propiedades entonces es un paralelogramo.**

- **Cuadrado**: Tiene los cuatro ángulos y los cuatro lados congruentes.

  Propiedades:

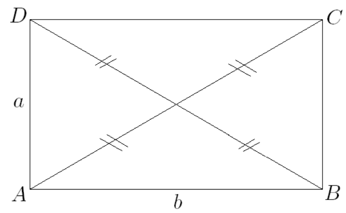
1. Diagonales Congruentes
2. Diagonales Perpendiculares
3. Diagonales Bisectrices



- **Rectángulo**: Tiene sus lados contiguos desiguales.

  Propiedades:

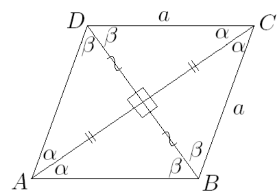
  1. Diagonales Congruentes



- **Rombo**: Tiene sus cuatro lados congruentes.

  Propiedades:

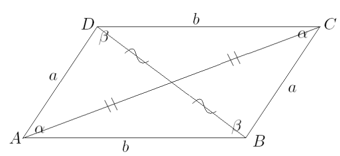
  1. Diagonales Perpendiculares
  2. Diagonales Bisectrices



- **Romboide**: Tiene sus lados contiguos desiguales.

  Propiedades:

  Solo tiene las cuatro propiedades generales de los paralelógramos.



9.6.2. Trapecios

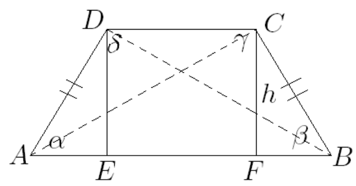
Tiene solo un par de lados paralelos, llamados bases.

Propiedades de todo trapecio:

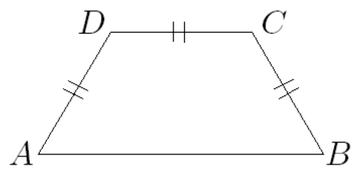
1. En todo trapecio la **mediana**[1] es igual a la semisuma de las bases.

- **Trapecio Isósceles**: Tiene:
  - Los lados no paralelos iguales. $\overline{AD} = \overline{BC}$
  - Losángulos basales iguales. $\alpha = \beta \qquad \gamma = \delta$
  - Las diagonales iguales. $\overline{AC} = \overline{BD}$
  - Al trazar sus alturas, se generan dos triángulos rectángulos congruentes, y en la base mayor un segmento igual a la base mayor. $\triangle AED \cong \triangle BFC \qquad \overline{EF} = \overline{DC}$

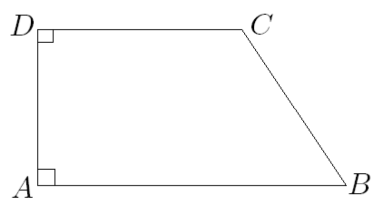
[1]Mediana: es el segmento que une los puntos medios de sus lados no paralelos.



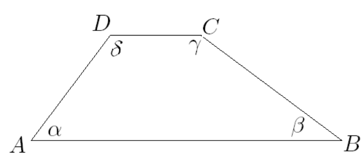
- **Trapecio Trisolátero**: Tiene tres lados iguales y posee las mismas propiedades del trapecio isósceles. $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$



- **Trapecio Rectángulo**: Tiene dos ángulos rectos. $\measuredangle CDA = \measuredangle DAB = 90°$



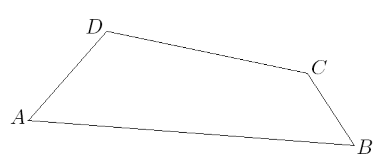
- **Trapecio Escaleno**: Tiene sus cuatro lados y sus cuatro ángulos distintos.
  $\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{CD} \neq \overline{DE} \qquad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta$



9.6.3. Trapezoides

No tiene par de lados paralelos.

- **Trapezoide Asimétrico**: Es el cuadrilátero convexo sin lados paralelos que puede tener: cuatro lados distintos; dos iguales y dos distintos; tres iguales y uno distinto.

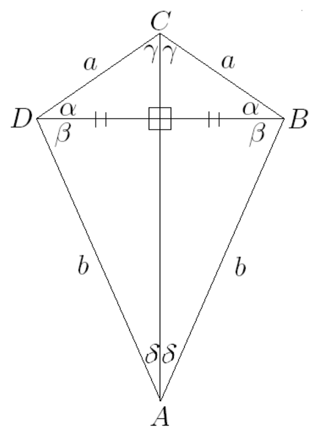


- **Trapezoide Simétrico o Deltoide**: Es formado por dos triángulos isósceles unidos por sus bases.

  Propiedades:

  1. Diagonales Perpendiculares

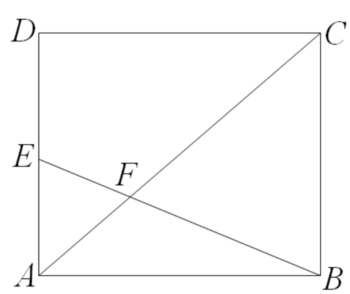
2. Diagonal mayor bisectriz
3. Diagonal mayor simetral de la diagonal menor



9.7. Mini Ensayo X Cuadriláteros

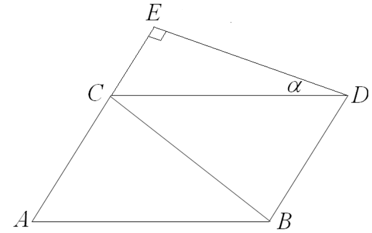
1. En el cuadrado $ABCD$ de la figura se ha trazado la diagonal $\overline{AC}$ y el $\measuredangle ABE$ mide la tercera parte del $\measuredangle ABC$, ¿cuál de las siguientes opciones NO es correcta?

   a) $\measuredangle ACB = 45°$
   b) $\measuredangle EFA = 60°$
   c) $\measuredangle AEB = 60°$
   d) $\measuredangle EFC = 105°$
   e) $\measuredangle DEB = 120°$



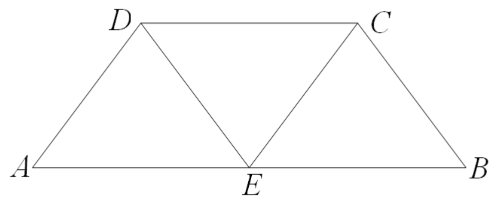
2. En la figura el $\triangle ABC$ es isósceles de base $\overline{AB}$, $ABCD$ es un rombo, si $\overline{DE} \perp \overline{AE}$ y $\measuredangle ACB = 6°$, entonces $\alpha =$

   a) 30°
   b) 45°
   c) 60°
   d) 75°
   e) 80°



3. En la figura $ABCD$ es un trapecio isósceles, $\overline{AB} : \overline{BC} = 2 : 1$, $\overline{EC} // \overline{AD}$. Si $\measuredangle ABC = 70°$ entonces $\measuredangle DEC =$

a) 70°
b) 60°
c) 55°
d) 30°
e) 20°

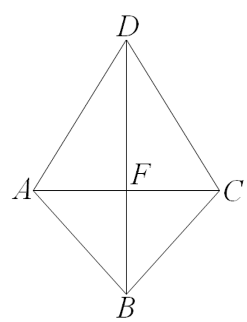


4. Al trazar una de las diagonales de un cuadrilátero se forman dos triángulo isósceles cuyas bases son la diagonal, sin embargo los ángulos basales de un triángulo miden el doble de los ángulos basales del otro, por lo tanto dicho cuadrilátero se trata de un:

   a) Cuadrado.
   b) Trapecio.
   c) Romboide.
   d) Trapezoide.
   e) Deltoide.

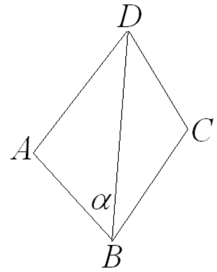
5. $ABCE$ es un deltoide $\overline{AF} : \overline{FD} = 1 : 2$, si $\overline{FC} = 4$, entonces $\overline{AD} =$

   a) $4\sqrt{5}$
   b) $4\sqrt{3}$
   c) $3\sqrt{3}$
   d) 4
   e) $2\sqrt{2}$



6. En la figura $\overline{BD}$ es bisectriz del $\measuredangle ADC$, $\overline{AD} = \overline{DC}$ y $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, entonces $\alpha =$

   a) 30°
   b) 45°
   c) 55°
   d) 60°
   e) Ninguna de las anteriores.



7. Al unir los puntos (2,4), (3,1), (6,4) y (7,1) del plano cartesiano, formamos un:

a) Cuadrado.

b) Rectángulo.

c) Rombo.

d) Romboide.

e) Trapecio.

8. En la figura $ABCD$ es un trapecio rectángulo en A y D, si $\measuredangle ABD = 60°$ y $\triangle BDC$ es isósceles de base $\overline{BC}$, ¿cuál es el valor del $\measuredangle\alpha$?

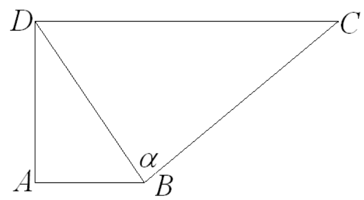
a) 60°

b) 30°

c) 90°

d) 45°

e) 120°



9. La mediana de un trapecio mide 20 cm. Si una de las bases es el triple de la otra, entonces la base mayor mide:

a) 40 cm

b) 30 cm

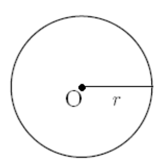
c) 15 cm

d) 10 cm

e) 5 cm

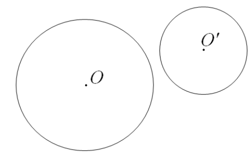
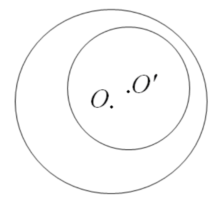
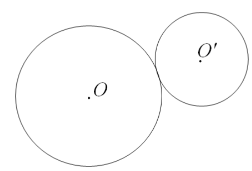
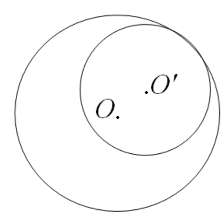
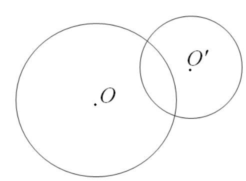
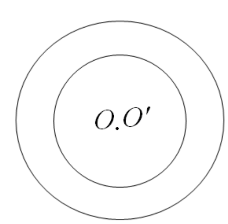
9.8. Circunferencia

Dado un punto O y una distancia r, se llama **circunferencia** de centro O y radio r al conjunto de todos los puntos del plano que están a la distancia r del punto O.



9.8.1. Posiciones Relativas a dos Circunferencias

Relación Entre Circunferencias	Descripción	Representación

Circunferencias Exteriores	Los puntos de cada una son exteriores a la otra.	
Circunferencias Interiores	Cuando todos los puntos de una de ellas, son interiores a la otra.	
Circunferencias Tangentes Exteriormente	Tienen un punto en común y los demás puntos de cada una son exterioresa la otra.	
Circunferencias Tangentes Interiores	cuando todos los puntos de una de ellas, son interiores de la otra.	
Circunferencias Secantes	Si tienen dos punto comunes.	
Circunferencias Concéntricas	Cuando tienen el mismo centro.	

9.9. Partes de la Circunferencia

Radio : Trazo cuyos extremos son el centro de la circunferencia y un punto de ésta. $\overline{OA}$

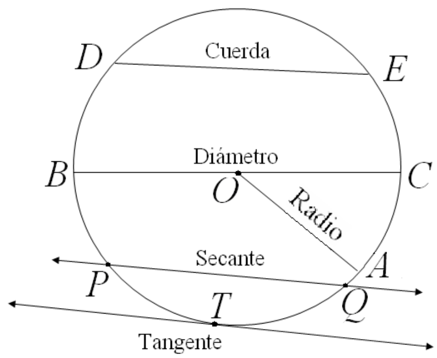
Cuerda : Trazo cuyos extremos son dos puntos de una circunferencia. $\overline{DE}$

Diámetro : Cuerda que contiene al centro de la circunferencia. $\overline{BC}$

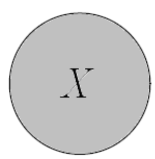
Secante : Recta que intersecta en dos puntos a la circunferencia. $\vec{PQ}$

Tangente : Recta que intersecta a la circunferencia en un solo punto. TM

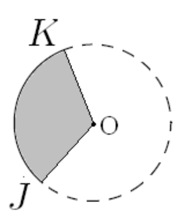
Arco : Es una parte de la circunferencia determinada por dos puntos distintos de ella. $E\widehat{N}C$



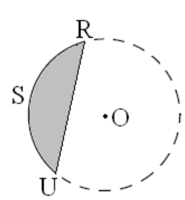
Círculo : Es la región interior de la circunferencia. X



Sector Circular : Es la parte del círculo comprendida entre dos radios. OJK



Segmento Circular : Es la parte del círculo comprendida entre un arco y la cuerda determinada por los extremos del arco. RSU



9.9.1. Teoremas Referentes a una Circunferencia

Teorema 1 : Si un radio de una circunferencia es perpendicular a una cuerda, entonces la dimidia y viceversa.

$$\boxed{\overline{OD} \perp \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AC} \cong \overline{CB}}$$

Teorema 2 : Si un radio de una circunferencia es perpendicular a una cuerda, entonces dimidia al arco que subtiende la cuerda y viceversa.

$$\boxed{\overline{OD} \perp \overline{AB} \Leftrightarrow \text{arco}(AD) \cong \text{arco}(DB)}$$

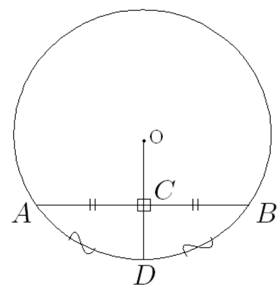


Figura 9.1: Teoremas 1 y 2

Teorema 3 : Cuerdas congruentes subtienden arcos congruentes y viceversa.

$$\boxed{\text{arco}(AB) \cong \text{arco}(CD) \Leftrightarrow \overline{CD} \cong \overline{AB}}$$

Teorema 4 : Cuerdas congruentes equidistan del centro y viceversa.

$$\boxed{\overline{OF} \cong \overline{OE} \Leftrightarrow \overline{CD} \cong \overline{AB}}$$

Teorema 5 : Cuerdas paralelas determinan entre ellas arcos congruentes.

$$\boxed{\overline{AB} \parallel \overline{GH} \rightarrow AG \cong BH}$$

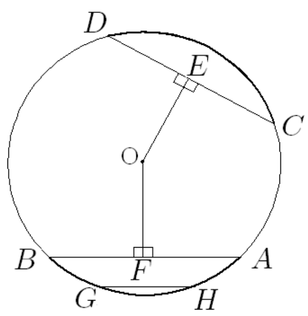
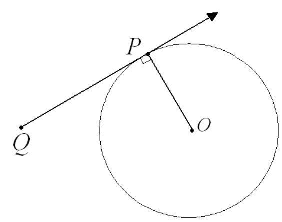


Figura 9.2: Teoremas 3, 4 y 5

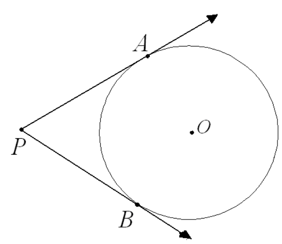
Teorema 6 : La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia.

$$\boxed{\overline{QP} \text{ tangente en } P \Rightarrow \overline{QP} \perp \overline{OP}}$$



Teorema 7 : Los segmentos tangentes trazados desde un punto a una circunferencia, con congruentes.

$$\boxed{\overline{PA} = \overline{PB}}$$



Teorema 8 : En todo cuadrilátero circunscrito a una circunferencia la suma de las longitudes de los lados opuestos es la misma.

$$\boxed{\overline{AB} + \overline{DC} = \overline{BC} + \overline{AD}}$$

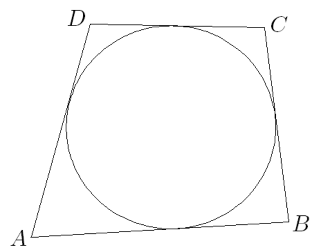
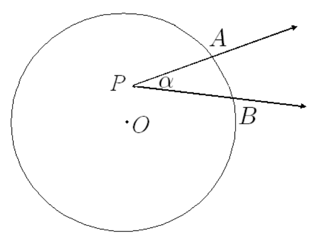


Figura 9.3: Teoremas 8

9.9.2. Ángulos en la Circunferencia

Ángulo Interior : Es todo ángulo cuyo vértice es un punto interior a la circunferencia. $\measuredangle APB$



Ángulo del Centro : Es todo ángulo interior cuyo vértice es el centro de la circunferencia. $\measuredangle DOE$

Ángulo Inscrito : Es todo ángulo cuyo vértice es un punto de la circunferencia y parte de sus rayos son cuerdas de ésta. $\measuredangle GHF$

Ángulo Semi-inscrito : Es todo ángulo cuyo vértice es un punto de la circunferencia, uno de sus rayos es tangente a la circunferencia justo en el vértice y parte del otro en una cuerda de ella. $\measuredangle BTA$

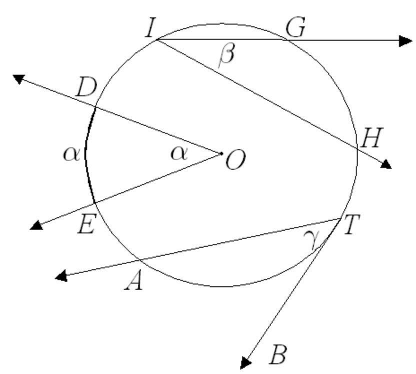
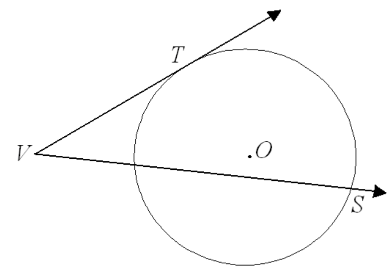
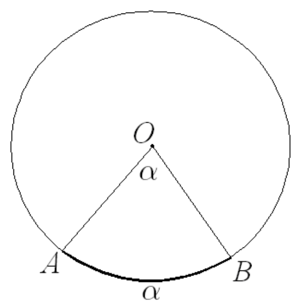


Figura 9.4: Ángulo del Centro, Inscrito y Semi-inscrito

Ángulo Exterior : Es todo ángulo cuyo vértice es un punto exterior a la circunferencia y sus dos rayos la intersectan. $\measuredangle TVS$



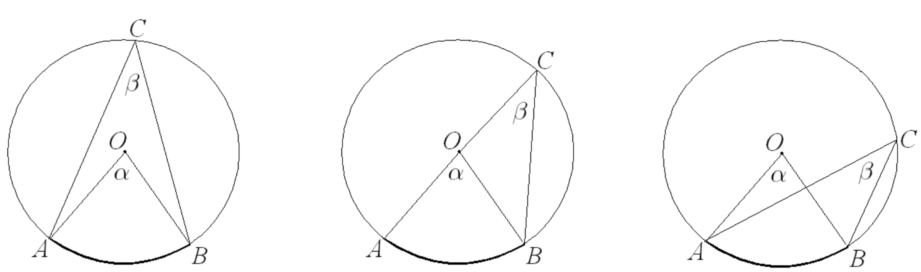
Medida Angular de un Arco : Es igual a la medida del ángulo del centro que subtiende dicho arco. arco$(AB) = \measuredangle AOB$



9.9.3. Teoremas Referentes a Ángulos en la Circunferencia

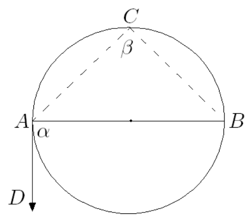
Teorema 1 : Todo ángulo inscrito en una circunferencia tiene como medida la mitad del ángulo del centro que subtiende el mismo arco.

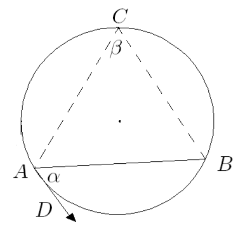
$$\boxed{\beta = \frac{1}{2}\alpha}$$

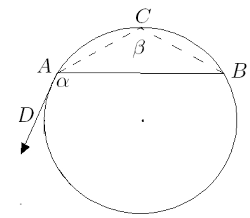


Teorema 2 : Todo ángulo semi-inscrito en una circunferencia tiene igual medida que cualquier ángulo inscrito que subtienede el mismo arco.

$$\boxed{\alpha = \beta}$$

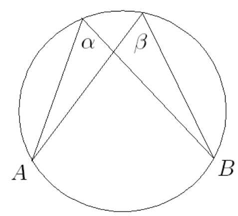






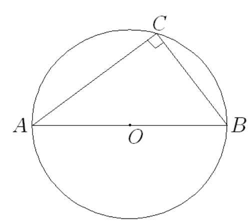
Teorema 3 : Todos los ángulos inscritos en una circunferencia que subtienden un mismo arco tienen igual medida.

$$\boxed{\alpha = \beta}$$



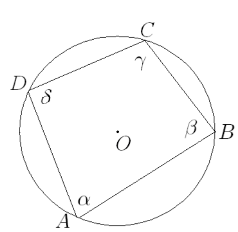
Teorema 4 : Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

$$\boxed{\measuredangle ACB = 90^\circ}$$



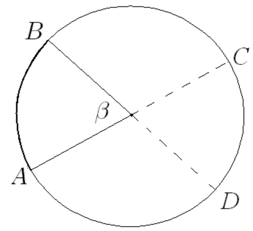
Teorema 5 : En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia los ángulos opuestos son suplementarios.

$$\boxed{\alpha + \gamma = 180^\circ} \quad \boxed{\beta + \delta = 180^\circ}$$



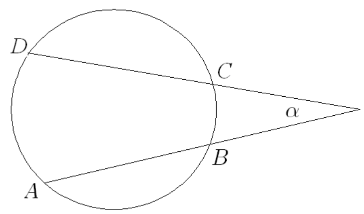
Teorema 6 : Todo ángulo interior a una circunferencia tiene por medida la semisuma de los arcos que comprenden sus lados y sus prolongaciones.

$$\boxed{\beta = \frac{\mathrm{arco}(AB) + \mathrm{arcp}(DC)}{2}}$$



Teorema 7 : Todo ángulo exterior a una circunferencia tiene por medida a la semidiferencia de los arcos que comprenden entre sus lados.

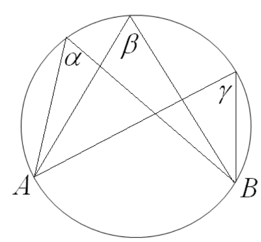
$$\boxed{\alpha = \frac{\text{arco}(AD) - \text{arco}(BC)}{2}}$$



9.10. Mini Ensayo XI Circunferencias

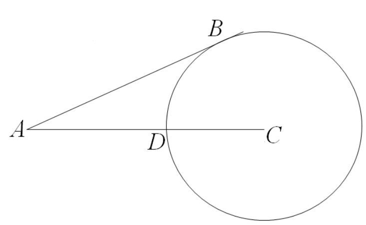
1. En la figura, el arco $AB = 70°$, entonces $2\alpha + \beta - \gamma =$

   a) 35°
   b) 70°
   c) 105°
   d) Ninguna de las anteriores.
   e) Falta información



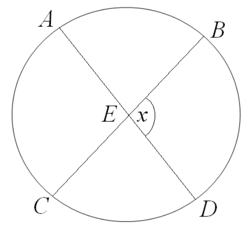
2. En la figura $\overline{AB}$ es tangente a la circunferencia, de centro C, en B, si $\measuredangle BAC = 30°$, ¿cuánto mide el arco DB?

   a) 50°
   b) 60°
   c) 90°
   d) 30°
   e) Falta Información.



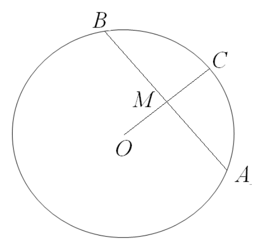
3. $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son diámetros de la circunferencia de centro E. Si el $\measuredangle DAB = 40°$ entonces $\measuredangle x =$

a) 40°
b) 80°
c) 100°
d) 120°
e) 140°



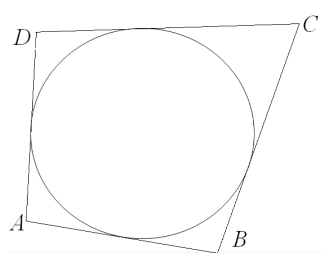
4. En la figura se tiene una circunferencia de centro O, M punto medio de $\overline{AB}$. Si $\measuredangle MBC : \measuredangle BCM = 3 : 2$, entonces $\measuredangle MAC =$

a) 27°
b) 36°
c) 40°
d) 45°
e) 54°



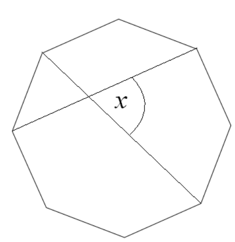
5. En la figura $\overline{AB} = 15$, $\overline{AD} = 12$ y $\overline{CD} = 25$, ¿cuánto mide $\overline{BC}$?

a) 12
b) 15
c) 20
d) 25
e) 28



6. El octágono de la figura es regular, ¿cuánto mide el $\measuredangle x$?

a) 22,5°
b) 45°
c) 67,5°
d) 90°
e) 112,5°



7. $\overline{DE}$ es secante a la circunferencia y $\overline{EB}$ es tangente a la circunferencia, si $\overline{DC} // \overline{AB}$ entonces el $\measuredangle x$ mide:

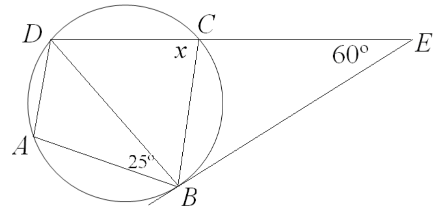
a) 35°

b) 50°

c) 55°

d) 85°

e) 90°



8. En la figura se muestra una circunferencia de centro O, el $\measuredangle AOB = 200°$, el arco $AC = 40°$, entonces el valor de el $\measuredangle x$ es:

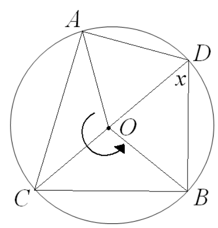
a) 70°

b) 80°

c) 100°

d) 40°

e) 45°



9. Dado que el arco $BD = 1/9$ de la circunferencia y el arco EA es $1/4$ de la misma, entonces el valor del $\measuredangle\alpha$ será:

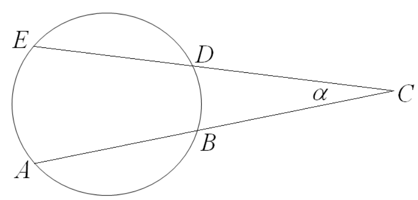
a) 65°

b) 50°

c) 130°

d) 45°

e) 25°



10. En la circunferencia de centro O de la figura, se tiene que el arco CD es igual al arco BC y $\measuredangle COB = 78°$ entonces el $\measuredangle x$ será:

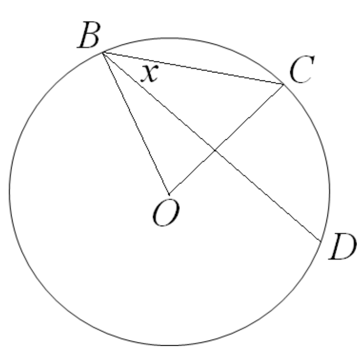
a) 78°

b) 36°

c) 39°

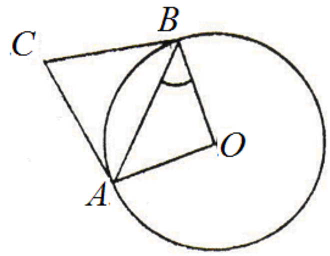
d) Otro valor.

e) Falta información.



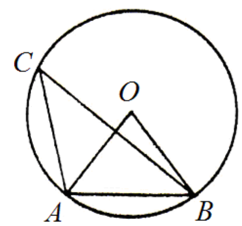
11. En la figura $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ son tangentes a la circunferencia, si el $\measuredangle ACB = 70°$ entonces el $\measuredangle ABO =$

a) 20°
b) 35°
c) 45°
d) 55°
e) 70°



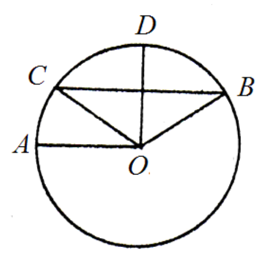
12. En la circunferencia de centro O, el $\measuredangle AOB = \frac{1}{2}\measuredangle BAO$, ¿cuánto mide el $\measuredangle ACB$?

a) 18°
b) 22,5°
c) 36°
d) 45°
e) 72°



13. En la circunferencia de centro O $\overline{AO} // \overline{BC}$, $\overline{OC} = \overline{CB}$ y $\overline{OD} \perp \overline{BC}$, entonces el $\measuredangle AOC =$

a) 30°
b) 45°
c) 60°
d) 75°
e) Falta información.

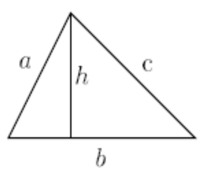
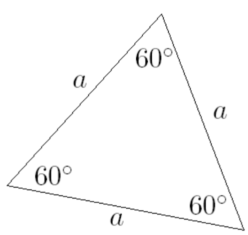
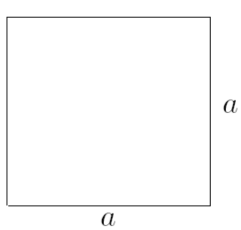
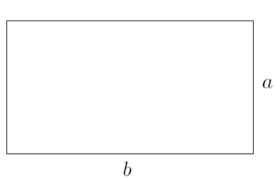


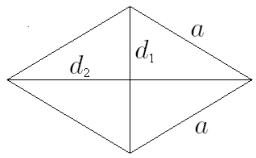
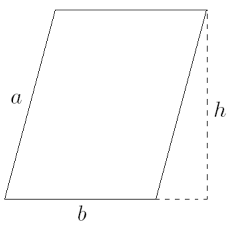
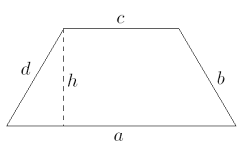
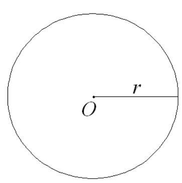
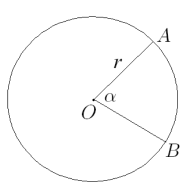
9.11. Áreas y Perímetros

Perímetro : De un polígono, es la suma de las longitudes de todos sus lados.

Área : Es la medida que le corresponde a la región poligonal

9.11.1. Áreas y Perímetros de Figuras Planas

Figura	Nombre	Claves	Perímetro	Área
	**Triángulo**	h=altura b=base	$P = a + b + c$	$A = \dfrac{b \cdot h}{2}$
	**Triángulo Equilátero**	a=lado	$P = 3a$	$A = \dfrac{a^2}{4}\sqrt{3}$
	**Cuadrado**	a=lado	$P = 4a$	$A = ab$
	**Rectángulo**	a=altura b=base	$P = 2a + 2b$	$A = ab$

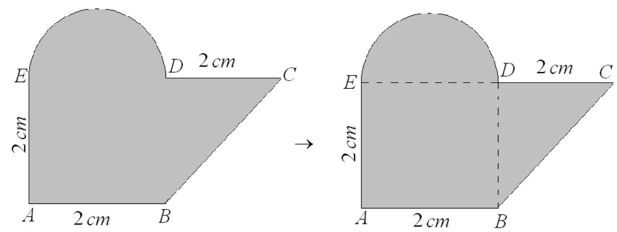
	**Rombo**	a=lado d_1, d_2=diagonales	$P = 4a$	$A = \frac{d_1 d_2}{2}$
	**Paralelógramo Cualquiera**	a, b=lados h=altura	$P = 2a + 2b$	$A = bh$
	**Trapecio**	a, b, c, d=lados d_1, d_2=diagonales	$P = a + b + c + d$	$A = \frac{a + c}{2}h$
	**Círculo**	r=radio O=centro	$P = 2\pi r$	$A = \pi r^2$
	**Sector Circular**	AB=arco OB, OA=radios α=ángulo	$P = \frac{\alpha}{360°} 2\pi r + 2r$	$A = \frac{\alpha}{360°} \pi r^2$

9.11.2. Suma de Áreas

En muchos ejercicios de geometría en la PSU se pide el cálculo de algún área específica formada por distintas figuras geométricas o por partes de ellas, en algunos de éstos ejercicios se ocupa el término "área achurada" o "área sombreada" para referirse al área en cuestión.

La manera de resolver éstos ejercicios es descomponer el área pedida en figuras geométricas que nos sean conocidas y que podamos calcular su valor, pues al sumar las áreas de todas las figuras que componen la definitiva obtendremos el valor del área pedida.

♠ Ejemplo:

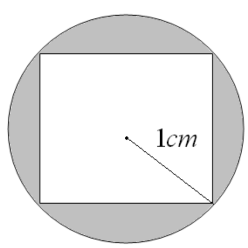


$$
\begin{aligned}
A_{\text{Total}} &= \underbrace{A_{\text{Semi círculo}}}+\underbrace{A_{\text{Cuadrado}}}+\underbrace{A_{\text{Triángulo}}} \\
&= \frac{\pi\cdot 1^2}{2} + 2^2 + \frac{2\cdot 2}{2} \\
&= \frac{\pi}{2}+4+2 \\
&= 6+\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

9.11.3. Diferencia de Áreas

Éstos ejercicios son aquellos en que es necesario "restar" áreas para poder obtener lo pedido, pues el área sombreada está entre figuras geométricas.

♠ Ejemplo:



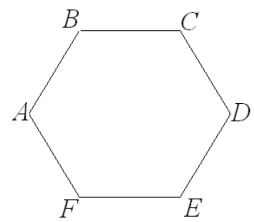
$$
\begin{aligned}
A_{\text{Total}} &= \underbrace{A_{\text{círculo}}}-\underbrace{A_{\text{cuadrado}}} \\
&= \pi\cdot 1^2 - \sqrt{2}^2 \\
&= \pi-2
\end{aligned}
$$

El lado de el cuadrado lo obtenemos suponiéndolo como el cateto del triángulo rectángulo que se forma al continuar el radio dibujado, y luego cupando el teorema de Pitágoras.

9.12. Mini Ensayo XII Áreas y Perímetros

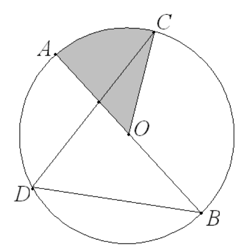
1. $ABCDEF$ es un hexágono regular de lado 2 cm, ¿cuál es el área del hexágno?

a) $6\sqrt{3}$
b) $8\sqrt{3}$
c) $12\sqrt{3}$
d) $16\sqrt{3}$
e) $18\sqrt{3}$



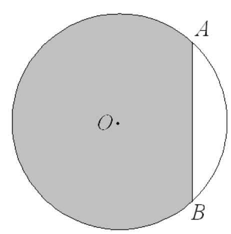
2. En la circunferencia de centro O y radio de 6 cm, el $\measuredangle BDC = 70°$, entonces el área y perímetro de la zona achurada son respectivamente: (concidere $\pi = 3$)

a) 30 cm^2; 22 cm
b) 12 cm^2; 22 cm
c) 30 cm^2; 16 cm
d) 12 cm^2; 16 cm
e) Falta información.



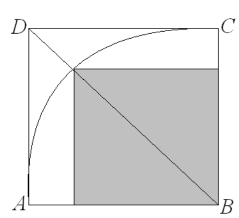
3. En la circunferencia de centro O con un radio de 1 cm, el arco AB es la cuarta parte de la circunferencia, ¿cuál es el valor del área achurada?

a) $\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}$
b) $\frac{4}{3}\pi + \frac{1}{2}$
c) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$
d) $\frac{3}{4}\pi$
e) Falta información.



4. $ABCD$ es un cuadrado de lado 6 cm y el arco AC es el de una circunferencia de centro B, ¿cuál es el perímetro del área achurada?

a) $6\sqrt{2}$
b) $9\sqrt{2}$
c) $12\sqrt{2}$
d) $15\sqrt{2}$
e) $18\sqrt{2}$



5. B, O y C dividen al diámetro $\overline{AD}$ en cuatro partes iguales, si $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ son diámetros de las respectivas semicircunferencias, entonces la razón entre el área no achurada y la achurada es:

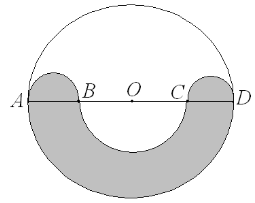
a) 9 : 7

b) 7 : 5

c) 1 : 1

d) 1 : 2

e) 1 : 4



6. Los $\triangle ABC$, $\triangle ADB$ y $\triangle DEC$ son equiláteros, si $\overline{AD} = 6\,cm$ entonces el área achurada es:

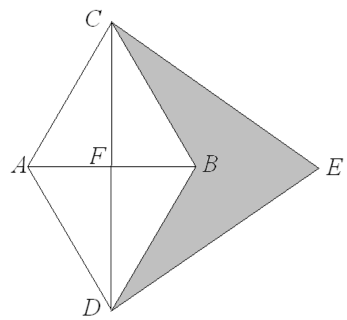
a) $18\sqrt{3}\ cm^2$

b) $20\ cm^2$

c) $6\sqrt{5}\ cm^2$

d) $3\sqrt{3}\ cm^2$

e) Ninguna de las anteriores.



7. Determine el área de un triángulo rectángulo sabiendo que sus lados son 3 números pares consecutivos.

a) 3

b) 6

c) 12

d) 24

e) 40

8. En un rectángulo $ABCD$ tal que $\overline{BC} = 12$, se han dibujado el $\triangle AEF$ equilátero en que $\overline{AE} = \overline{EB} = 7\,cm$ y un rectángulo de ancho igual a la tercera parte de $\overline{BC}$, con largo la mitad de $\overline{AB}$, ¿cuál es el perímetro del área sombreada?

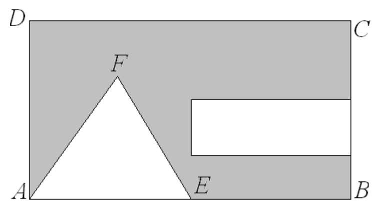
a) 61 cm

b) 65 cm

c) 69 cm

d) 73 cm

e) 80 cm



9. En la figura $ABCD$ es rectángulo y $\overline{CD} = 2\,cm$ es diámetro de la circunferencia de centro O si $\overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 2$ y M es punto medio de $\overline{AB}$, entonces el área achurada es:

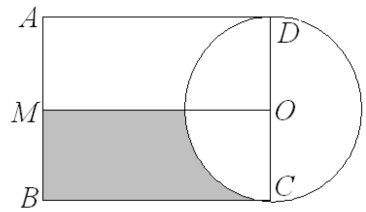
a) $\left(4 - \frac{\pi}{4}\right)\ cm^2$

b) $\left(8 - \frac{\pi}{2}\right)\ cm^2$

c) $(4 - \pi)\ cm^2$

d) $(8 - 2\pi)\ cm^2$

e) Ninguna de las anteriores.

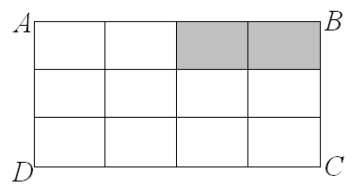


10. Si el rectángulo $ABCD$ está dividido en 12 rectángulos congruentes, ¿cuál de las siguientes expresiones representa el área achurada?

I. $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{4}$ del área de $ABCD$

II. $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$ del área de $ABCD$

III. $\frac{3}{24}$ del área de $ABCD$



a) Solo I

b) Solo II

c) I y II

d) I y III

e) I, II y III

11. Si el radio de una circunferencia mide 8 m, ¿Cuánto mide el perímetro de un cuadrado inscrito en ella?

a) $16\sqrt{2}\ m$

b) $32\sqrt{2}\ m$

c) $40\sqrt{2}\ m$

d) $64\sqrt{2}\ m$

e) $256\sqrt{2}\ m$

12. El área de la figura que se obtiene al unir los puntos (0,0), $(-3, 5)$ y $(-3{,}0)$ es:

a) 0

b) 3

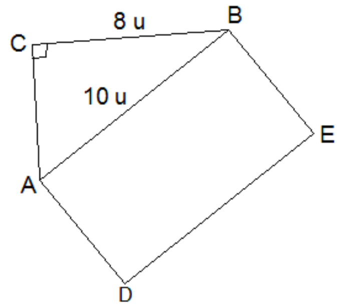
c) 6

d) 7,5

e) 15

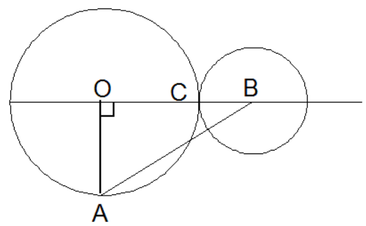
13. En la figura, ¿cuánto debe medir el ancho del rectángulo $ABED$, para que su área sea el doble del área del $\triangle ABC$?

a) 2,4u
b) 4,8u
c) 9,6u
d) 8,2u
e) 8u



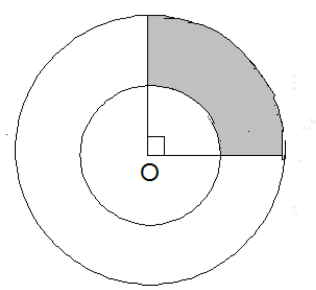
14. En la figura se han dibujado dos circunferencias tangentes exteriores de centro O y B respectivamente, si $\overline{OA} \perp \overline{OB}$, $\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{OC} = 2\ cm$, ¿cuál es el perímetro del $\triangle ABO$?

a) 10 cm
b) 16 cm
c) $12\sqrt{3}$ cm
d) $8 + 2\sqrt{10}$ cm
e) $10 + 2\sqrt{13}$ cm



15. En la circunferencia, el área sombreada mide $5\pi\ cm^2$, si el radio de la circunferencia mayor es 6 cm, entonces el radio menor mide:

a) 2 cm
b) 3 cm
c) 4 cm
d) 5 cm
e) 6 cm



16. Si cada cuadrado de la figura tiene un área de 4 cm^2, ¿cuál es el perímetro de la figura?

a) 32 cm
b) $32\sqrt{2}$ cm
c) $6\sqrt{2} + 10$ cm
d) $6\sqrt{2} + 20$ cm
e) $12\sqrt{2} + 20$ cm