Capítulo 7

Inecuaciones

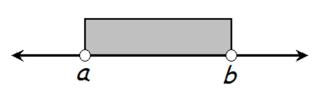
Dentro del mundo de la resolución de problemas te encontrarás en ocaciones en que la incógnita que deseas encontrar no tiene tantas restricciones que la hacen ser única para satisfacer alguna ecuación, existen casos en que la solución puede ser el conjunto completo de los números positivos por ejemplo, o todos los número mayores que 1.000.000, que por cierto en ambos casos la cantidad de soluciones son infinitas[1].

7.1. Intervalo

Como ya sabemos el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, lo podemos representar en una recta numérica. Por lo tanto cada segmento de ésta recta representa a un subconjunto de $\mathbb{R}$, cada uno de éstos subconjuntos se denomina *Intervalo*. Existen distintos tipos de intervalos.

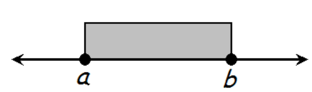
7.1.1. Intervalo Abierto

Un intervalo abierto de a a b, con $a < b$, es el conjunto de todos los número reales que cumplen que son mayores que a y menores que b, es decir, son todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que $a < x < b$. Se denota como $]a, b[$ y su representación gráfica es:



7.1.2. Intervalo Cerrado

Un intervalo cerrado de a a b, con $a < b$, es el conjunto de todos los número reales que cumplen que son mayores o iguales que a y menores o iguales que b, es decir, son todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq x \leq b$. Se denota como $[a, b]$ y su representación gráfica es:

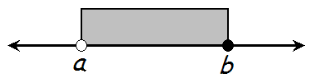


[1]**Infinito :** Que no tiene fin en cantidad o en espacio. Matemáticamente se escribe con el símbolo ∞ y representa un valor mayor que cualquier cantidad asignable. –Diccionario Enciclopédico Ilustrado NORMA–

7.1.3. Intervalo Semi-Abierto

1. **Por la Izquierda**

   Un intervalo semi-abierto por la izquierda es el conjunto de todos los número reales que cumplen que son mayores que a y menores o iguales que b, es decir, son todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que $a < x \leq b$. Se denota como $]a, b]$ y su representación gráfica es:

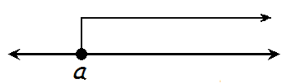
2. **Por la Derecha**

   Un intervalo semi-abierto por la derecha es el conjunto de todos los número reales que cumplen que son mayores o iguales que a y menores que b, es decir, son todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq x < b$. Se denota como $[a, b[$ y su representación gráfica es:

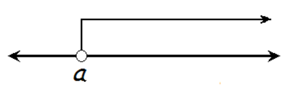
   

También existen intervalos que no tienen límite superior o inferior (en los casos anteriores el límite inferior era a y el superior b), en el primer caso ocupamos el símboplo $+\infty$ o simplemente ∞ y en el segundo el símbolo $-\infty$, que significan, "mas infinito" y "menos infinito" respectivamente.

Por ejemplo veamos el conjunto formado por todos los números que son mayores o iguales que a, es decir, todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq x$, este conjunto lo denotamos como $[a, +\infty[$, y gráficamente se vería como:



Si el intervalo fuera $]a, +\infty[$, es decir, todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que $a < x$, entonces:



7.2. Desigualdades

Las desigualdades son todas aquellas expresiones algebraicas que poseen alguno de los cuatro símbolos de desigualdad $(<, >, \leq, \geq)$[2].

7.2.1. Desigualdad Absoluta

Análogamente al concepto de identidad[3], una desigualdad es absoluta cuando se satisface para cualquier valor de sus incógnitas o variables.

[2]Ver Simbología, tras la portada.
[3]Ver página 55

♠ Por ejemplo:

† $x^2 \geq 0$

† $(x + y)^2 \geq 0$

† $z < z + 1$

Son desigualdades absolutas, pues para cualquier valor real de sus variables que reemplaze, estas desigualdades se seguirán cumpliendo.

7.2.2. Desigualdad Condicionada o Inecuación

Análogamente al concepto de ecuación[4], una desigualdad es condicionada cuando se satisface solo para algunos valores de sus incógnitas o variables.

♠ Por ejemplo:

† $x + 1 \geq 0$, sólo se cumple si $x \geq -1$

† $2y > 10$, sólo se cumple si $y > 5$

† $z + 1 < 6$, sólo se cumple si $z < 5$

Estas son las llamada inecuaciones.

7.3. Resolución de Inecuaciones

Antes de comenzar esta parte veamos las siguientes reglas o axiomas que nos hablan sobre el orden en los números reales:

1^{ero} **Axioma de Tricotomía**

Sean a y $b \in \mathbb{R}$, entonces entre ellos solo cumplen **una y solo una** de las siguientes afirmaciones:

$$a < b, \qquad a = b \qquad a > b$$

2^{do} **Axioma de Transitividad**

Sean a, b y $c \in \mathbb{R}$, tales que $a < b$ y $b < c$ entonces siempre $a < c$.

3^{ero} **Axioma de Adición**

Sean a, b y $c \in \mathbb{R}$, tales $a < b$ entonces siempre $a + c < b + c$.

4^{to} **Axioma de Multiplicación**

Sean a, b y $c \in \mathbb{R}$, tales $a < b$ y $c > 0$ entonces siempre $a \cdot c < b \cdot c$.

♢ *Observa que ...*

Del último axioma se deduce entonces que si $a < b$ y $c < 0$ entonces $a \cdot c > b \cdot c$.

En otras palabras, multiplicar una desigualdad por un número negativo cambiará la dirección de la desigualdad.

---

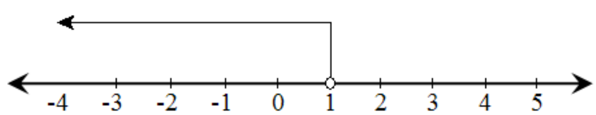
[4] Ver sección 5.1

Veamos algunos ejemplos :

♠ Ejemplo 1

$$\begin{array}{rcll}
5x+7 & < & 12 & \rightarrow \text{ Ocupando el axioma de adición podemos sumar a ambos lados el número } -7.\\
5x+7+-7 & < & 12-7 & \rightarrow \text{ Como } -7 \text{ es el inverso aditivo de 7 implica que } 7+-7=0.\\
5x+0 & < & 5 & \\
5x & < & 5 & \rightarrow \text{ Luego ocupando el axioma de la multiplicación podemos multiplicar a ambos lados por } \frac{1}{5}.\\
5x\cdot 1/5 & < & 5\cdot 1/5 & \rightarrow \text{ Al lado izquierdo podemos conmutar}\\
x\cdot 5\cdot 1/5 & < & 1 & \rightarrow \text{ Obteniendo finalmente.}\\
x\cdot 1 & < & 1 & \\
x & < & 1 & \rightarrow \text{ Lo que implica que el conjunto solución es }]-\infty,1[.
\end{array}$$

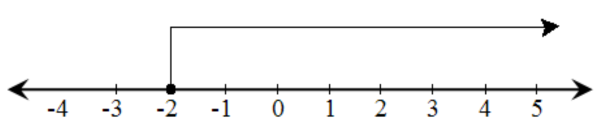
Gráficamente la solución se ve:



♠ Ejemplo 2

$$\begin{array}{rcll}
3-2x & \leq & 7 & \rightarrow \text{ Ocupando el axioma de adición podemos sumar a ambos lados el número } -3.\\
3+-3-2x & \leq & 7+-3 & \rightarrow \text{ Como } -3 \text{ es el inverso aditivo de 3 implica que } 3+-3=0.\\
0-2x & \leq & 4 & \\
-2x & \leq & 4 & \rightarrow \text{ Luego podemos multiplicar a ambos lados por } -\frac{1}{2} \text{ teniendo cuidado que } -\frac{1}{2} \text{ es negativo por lo tanto, cambia la dirección de la desigualdad.}\\
-2x\cdot -1/2 & \geq & 4\cdot -1/2 & \rightarrow \text{ Al lado izquierdo podemos conmutar}\\
x\cdot -2\cdot -1/2 & \geq & -2 & \rightarrow \text{ Obteniendo finalmente.}\\
x\cdot 1 & \geq & -2 & \\
x & \geq & -2 & \rightarrow \text{ Lo que implica que el conjunto solución es }]-2,+\infty[
\end{array}$$

Gráficamente la solución se ve:

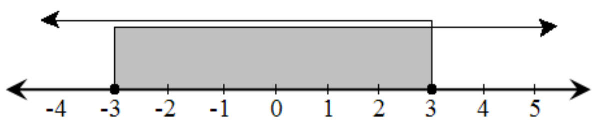


♠ Ejemplo 3

$$\begin{array}{rcll}
x^2-2 & \leq & 7 & \rightarrow \text{ Ocupando el axioma de adición podemos sumar a ambos lados el número 2.} \\
x^2-2+2 & \leq & 7+2 & \\
x^2+0 & \leq & 9 & \\
x^2 & \leq & 9 & \rightarrow \text{ En éste paso debemos tener especial cuidado, pues pueden haber dos posibilidades} \\
\text{Caso 1} \rightarrow \quad x & \leq & 3 & \rightarrow \text{ En este caso se tiene que el conjunto solución es }]-\infty,3] \\
\text{Caso 2} \rightarrow \quad x & \geq & -3 & \rightarrow \text{ En este caso se tiene que el conjunto solución es } [-3,\infty[
\end{array}$$

Por lo tanto El conjunto solución de esta inecuación debe ser uno que cumpla con estas dos últimas restricciones, es decir ser mayor o igual que -3 y a la vez de menor o igual que 3.

Gráficamente podemos ver que los números que cumplen esto son los que están entre -3 y 3, considerando a éstos últimos.



En éste tipo de casos decimos que el conjunto solución será producto de la intersección entre los dos conjuntos solución particulares.

$$\text{Solución} \quad \rightarrow \quad [-3,+\infty[\ \cap\ ]-\infty,3] = [-3,3]$$

♠ Ejemplo 4

$$\begin{array}{rcll}
6/x & < & 3 & \rightarrow \text{ En éste caso podemos ocupar el axioma de multiplicación (multiplicando por } x\text{), pero teniendo cuidado de que } x \text{ puede ser positivo o negativo, por lo tanto recaemos en dos casos}
\end{array}$$

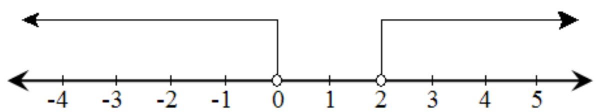
Caso 1 : Si $x > 0$

$$\begin{array}{rcll}
6 & < & 3x & \\
6/3 & < & x & \\
2 & < & x & \rightarrow \text{ En este caso se tiene que el conjunto solución es }]2,+\infty[
\end{array}$$

Caso 2 : Si $x < 0$

$$\begin{array}{rcll}
6 & > & 3x & \\
6/3 & > & x & \\
2 & > & x & \rightarrow \text{ En este caso se tiene que el conjunto solución es }]-\infty,2[\text{, pero hay que tener cuidado pues una condición del caso fue que } x<0\text{, por lo tanto el verdadero conjunto solución será }]-\infty,0[
\end{array}$$

El conjunto solución de la inecuación debe ser uno que cumpla con alguna de estas restricciones, ser mayor que 2 o menor que 0. Gráficamente podemos ver lo números que cumplen a lo menos una:



En éste tipo de casos decimos que el conjunto solución será producto de la unión entre los dos conjuntos solución particulares.

$$\text{Solución} \quad \rightarrow \quad]-\infty, 0[\, \cup\,]2, +\infty[$$

♣ **Actividad**

I. *Representa gráficamente los siguientes intervalos:*

1.	$]2,6[$	*4.*	$[-100,+\infty[$	*7.*	$[0,1]$
2.	$[6,2[$	*5.*	$]-\infty,+\infty[$	*8.*	$]\sqrt[5]{3}, \sqrt[3]{2}]$
3.	$]-\infty,0]$	*6.*	$[1,2[$	*9.*	$]e.\pi[$

II. *Determina el intervalo y grafica las siguientes desigualdades:*

1.	$1 < x$	*4.*	$\infty < x$	*7.*	$x \geq 12$
2.	$2 \geq x$	*5.*	$2 < x < 9$	*8.*	$0 > x \geq 10$
3.	$\pi < x$	*6.*	$8 \leq x < 9$	*9.*	$-8 > x > -7$

III. *Resuelve las siguientes inecuaciones, determina su conjunto solución, si existe, y grafícalo:*

1.	$x + 1 > 6$	*4.*	$8 - 3x < 2$	*7.*	$x^2 + 1 \geq 10$
2.	$x - 5 < 1 - x$	*5.*	$-x + 1 < 4$	*8.*	$\frac{8}{x} > 2$
3.	$2x + 5 \leq 1$	*6.*	$(x + 1)^2 < 1$	*9.*	$1 + x > 2x - 9$

7.4. Mini Ensayo VII Desigualdades e Inecuaciones

1. El intervalo solución de la inecuación $-3x + 1 < 7$ es:

   a) $]-2, +\infty[$
   b) $]-\infty, 2[$
   c) $]-\infty, 8/3[$
   d) $]-\infty, -8/3[$
   e) $]-8/3, 8/3[$

2. Si $x \in [1, 4[$ entonces $(2x + 1)$ pertenece a:

   a) $[1, 4[$
   b) $[3, 9[$
   c) $[1, 4]$
   d) $]1, 4]$
   e) $]3, 9]$

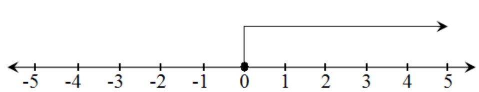
3. Si $a < b$, $b < c$ y $c < 0$ entonces es falso que:

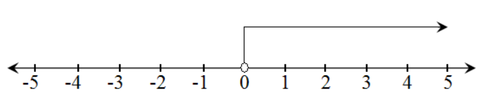
   a) $c < b - a$
   b) $a < c$
   c) $ac > bc$
   d) $a + c > b + c$
   e) $a - b < 0$

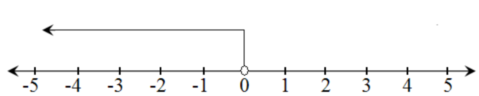
4. Si $x \in [a, b[$ entonces:

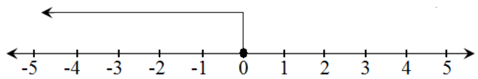
   a) $a \leq x \leq b$
   b) $a < x < b$
   c) $a \leq x < b$
   d) $a < x \leq b$
   e) $a > x > b$

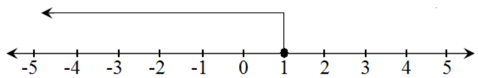
5. La representación gráfica de la solución de la inecuación $\frac{3-2x}{2} \geq \frac{15}{10}$ es:

   a)


   b)


   c)


d) 

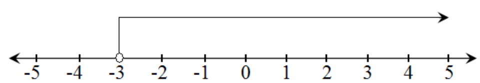
e) 

6. Si $a < b < c < d$ entonces $[a, c[\cup]b, d] =$

   a) $[a, d]$
   b) $[c, b]$
   c) $]a, d[$
   d) $[a, d[$
   e) $]a, d]$

7. La figura corresponde a la solución de :

   a) $x \geq 3$
   b) $4 > 1 - x$
   c) $-3 \leq x$
   d) $-3 > x$
   e) $x < 3$



8. Si $a < b < c < d$ entonces $[a, c[\cap]b, d] =$

   a) $[c, b]$
   b) $[a, d]$
   c) $]a, d[$
   d) $]b, c[$
   e) $[b, c]$

9. La solución del siguiente sistema de inecuaciones es:

$$\left.\begin{array}{rcl} 4x+2 & > & 1 \\ 6x & \leq & 2 \end{array}\right|$$

   a) $-\frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{3}$
   b) $\frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{3}$
   c) $-\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{4}$
   d) $-\frac{1}{3} < x \leq -\frac{1}{4}$
   e) $-\frac{1}{4} < x$