

Capítulo 3

Introducción al Álgebra

La palabra álgebra deriva del nombre del libro “Alyebr-mugabala” escrito en el año 825 D.C. por el matemático y astrónomo musulmán Mohamed ibn al-Jwarizni. El álgebra es la rama de la matemática que estudia estructuras, relaciones y cantidades de un modo más general que la aritmética, pues utiliza letras o símbolos que pueden tomar cualquier valor para desarrollar distintos tipos de problemas que pueden tener múltiples y cambiantes factores que intervengan.

Para trabajar con el álgebra es necesario conocer el denominado Lenguaje Algebraico, mediante el cual escribimos frases y proposiciones del lenguaje común, por medio de símbolos y letras para ya que de ésta manera podemos plantear problemas que se quieren resolver. Para hacer un lenguaje más fluido.

3.1. Signos del Álgebra

En la escritura algebraica generalmente se representa a cantidades que nos son conocidas por las primeras letras del alfabeto (a, b, c, d, e, \dots), y para representar las cantidades que nos son desconocidas utilizaremos las últimas letras del alfabeto ($\dots v, w, x, y, z$). Para unir éstas cantidades utilizamos signos de operación, de relación y de agrupación, los cuales son:

- Signos de operación:
 - $a + b$ a más b
 - $a - b$ a menos b
 - $a \cdot b$ a multiplicado por b (o simplemente, a por b)
 - $a : b$ (o $\frac{a}{b}$) a dividido por b
 - a^b a elevado a b
 - $\sqrt[b]{a}$ la raíz b-ésima de a.
- Signos de relación:
 - = igual a
 - > mayor que
 - < menor que.
- Signos de agrupación: paréntesis
 - ()
 - {}
 - []

3.2. Lenguaje Algebraico

Para poder trabajar con el álgebra es necesario manejar la equivalencia entre el lenguaje común o cotidiano con el lenguaje algebraico. A continuación haremos un paralelo entre los dos lenguajes, para así poder aplicarlo en el planteamiento de problemas.

Lenguaje Algebraico	Lenguaje Cotidiano
+	Más, suma, adición, añadir, aumentar
-	Menos, diferencia, disminuido, exceso, restar
·	De, del, veces, producto, por, factor
÷, :	División, cuociente, razón, es a
=	Igual, es da, resulta, se obtiene, equivale a
x	Un número cualquiera
$x + 1$	Sucesor de un número
$x - 1$	Antecesor de un número
$2x$	Doble de un número, duplo, dos veces, número par, múltiplo de dos
$3x$	Triple de un número, triplo, tres veces, múltiplo de 3
$4x$	Cuádruplo de un número
x^2	Cuadrado de un número
x^3	Cubo de un número
$\frac{1}{2}x$ ó $\frac{x}{2}$	Mitad de un número, un medio de
$\frac{1}{3}x$ ó $\frac{x}{3}$	Tercera parte de un número, un tercio de
$\frac{1}{x}$	Inverso multiplicativo
$2x + 1$ ó $2x - 1$	Número impar
$\frac{x+y}{2}$	Semi suma de dos números
$\frac{x-y}{2}$	Semi diferencia de dos números
$x, x + 1, x + 2, x + 3, \dots$	Números consecutivos
$2x, 2x + 2, 2x + 4, 2x + 6, \dots$	Números pares consecutivos
$2x + 1, 2x + 3, 2x + 5, 2x + 7, \dots$	Números impares consecutivos
$4x, 4x + 4, 4x + 8, 4x + 12, \dots$	Múltiplos consecutivos de 4
$5x, 5x + 5, 5x + 10, 5x + 15, \dots$	Múltiplos consecutivos de 5
$10x + y$	Número de dos cifras, Número de dos dígitos



Actividad

Escribir en lenguaje cotidiano las siguientes expresiones algebraicas:

- | | | |
|-----------------------|------------------------|--|
| 1. $x - 4$ | 7. $\frac{2x-3y}{4}$ | 13. $\frac{3x^2-(2y)3}{4}$ |
| 2. $2x + 3y$ | 8. $\frac{(x+y)^2}{3}$ | 14. $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{2}$ |
| 3. $5x - y$ | 9. $x + \frac{x}{4}$ | 15. $\frac{2(x^2+y^3)}{3}$ |
| 4. $\frac{x}{4} + 3y$ | 10. $(7x)^3$ | 16. $x^2(x + 1) - 1$ |
| 5. $(x - 3)^2$ | 11. $7(x)^3$ | 17. $\frac{3x-2}{3x-4}$ |
| 6. $x^2 - 3$ | 12. $(2x)^2 - 4y^3$ | 18. $(2x - y)^3$ |



Escribir en lenguaje cotidiano las siguientes expresiones:

1. El doble de un número disminuido en el triple de otro número
 2. Un número aumentado en su mitad
 3. El exceso de número sobre tres
 4. El cuádruple del exceso de un número sobre ocho
 5. El exceso del quíntuplo de un número sobre diez
 6. El doble del cubo de un número
 7. El cubo del cuádruple de un número
 8. La diferencia entre la cuarta parte del cubo de un número y la tercera parte del cuadrado de otro número
 9. La mitad del exceso del cuadrado del triple de un número sobre el doble del cubo de otro número
 10. La suma de dos múltiplos consecutivos cualesquiera de ocho
-
-

3.3. Expresiones Algebraicas

Es la representación de una o más operaciones algebraicas.

♠ Ejemplos:

$$\begin{aligned} & \dagger (a + b) \\ & \dagger \frac{6-2a}{3b} \\ & \dagger \frac{a}{b} \end{aligned}$$

3.3.1. Término

Es una expresión algebraica formada por varios símbolos no separados entre si por (+) ó (-)

♠ Ejemplos:

$$\begin{aligned} & \dagger 7b \\ & \dagger \frac{3a}{4x} \\ & \dagger 15xz \\ & \dagger a \end{aligned}$$

Los elementos de un término son el signo, el coeficiente, la parte literal y el grado

Ejemplos :

♠ $-3b^2$, es un término negativo, su coeficiente es -3 , la parte literal es b^2 y el grado es 2.



Observa que...

El coeficiente puede ser numérico o literal, por lo general se toma el primer elemento y como se acostumbra poner el número antes que la letra, este número es el coeficiente. El grado puede ser absoluto o con respecto a una letra.

♠ $4a^2b^3c^4$, el grado absoluto es 9 ya que es la suma de los exponentes de los factores literales, con respecto a a es 2, a b es 3, a c es 4.

3.3.2. Clasificación de las Expresiones Algebraicas

Monomio : Consta de un solo término.

♠ Ejemplos:

† $4b$

† $-8c$

† $\frac{4ab}{c^2}$

Polinomio : Consta de más de un término.

♠ Ejemplos:

† $4a + 2b$

† $\frac{c-b-\frac{a}{b}+3-y}{5b^3}$

† $\frac{a^2}{5} - \frac{9c}{4d} - 14 + 11y$

Los polinomios más utilizados son:

- Binomios: Consta de 2 términos
- Trinomios: Consta de 3 términos

3.3.3. Términos Semejantes

Dos o más términos son semejantes si tienen la misma parte literal (iguales letras e iguales exponentes).

♠ $12p$, $-3,5p$ y $\frac{7p}{2}$, son términos semejantes.



Observa que...

Solo teniendo términos semejantes tu puedes sumar o restar.

3.3.4. Eliminación de Paréntesis

Si al paréntesis lo antecede un signo positivo (+), ponemos este y todos los términos quedan igual, no sucede lo mismo con el signo negativo (-), ya que este invierte todos los signos de los términos del paréntesis.



Actividad

Resuelve reduciendo términos semejantes.

1. $7a - 9b + 6a - 4b$
 2. $-71a^3b - 82a^4b^2 + 50a^3b + 84a^4b^2 + 45a^3b$
 3. $a^{m+2} + x^{m+3} - 5 + 8 - 3a^{m+2} + 5x^{m+3} - 6 + a^{m+2} - 5x^{m+3}$
 4. $-a + b + 2b - 2c + 3a + 2c - 3b$
 5. $\frac{3m^2}{5} - 2mn + \frac{1m^2}{10} - \frac{1mn}{3} + 2mn - 2m^2$
 6. $-\{-[-(a + b - c)]\} - \{+[-(c - a + b)]\} + [-\{-a + (-b)\}]$
-
-

3.4. Productos Algebraicos

3.4.1. Multiplicación de Monomios

Se multiplican los coeficientes y luego las letras en orden alfabético.

$$\spadesuit (3x^2)(4xy^2) = 12x^{2+1}y^2 = 12x^3y^2$$

$$\spadesuit (-5a^3)(3ab) = -15a^{3+1}b = -15a^4b$$



Actividad

Multiplique los siguientes monomios:

- | | |
|---|--|
| 1. $(-5x^3y)(xy^2)$ | 10. $(\frac{1}{2}a^2)(\frac{4}{5}a^3b)$ |
| 2. $(-4a^2b)(-ab^2)$ | 11. $(-\frac{3}{5}x^3y^4)(-\frac{5}{6}a^2by^5)$ |
| 3. $(a^2b^3)(3a^x)$ | 12. $(-\frac{2}{9}a^xb^m + 1)(-\frac{3}{5}a^x(x-1)b^m)$ |
| 4. $(-15x^4y^3)(-16a^2x^3)$ | 13. $(a)(-3a)(a^2)$ |
| 5. $(-5a^mb^n)(-6a^2b^3x)$ | 14. $(-m^2n)(-3m^2)(-mn^3)$ |
| 6. $(x^my^nc)(-x^my^nc^x)$ | 15. $(a^mb^x)(-a^2)(-2ab)(-3a^2x)$ |
| 7. $(-m^xn^a)(-6m^2n)$ | 16. $(\frac{2}{3}a^m)(\frac{3}{4}a^2b^4)(-3a^4b(x+1))$ |
| 8. $(-3a^{(n+4)}b^{(n+1)})(-4a^{(n+2)}b^{(n+3)})$ | 17. $(-\frac{3}{5}m^3)(-5a^2m)(-\frac{1}{10}a^xm^a)$ |
| 9. $(4x^{(a+2)}b^{(a+4)})(-5x^{(a+5)}b^{(a+1)})$ | 18. $(-\frac{1}{2}x^2y)(-\frac{3}{5}xy^2)(-\frac{10}{3}x^3)(-\frac{3}{4}x^2y)$ |
-
-

3.4.2. Multiplicación de Polinomio por Monomio

Multiplicamos el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

$$\spadesuit (3a^2 - 7a + 4)4ax^2 = (3a^2)(4ax^2) - (7a)(4ax^2) + a(4ax^2) = 12a^3x^2 - 28a^2x^2 + 16ax^2$$



Observa que...

Al multiplicar letras tienes que sumar los exponentes. Siempre tienes que reducir términos semejantes.



Actividad

Multiplicar:

1. $(8x^6y - 3y^2)(2ax^3)$
 2. $(m^4 - 3m^2n^2 + 7n^4)(-4m^3x)$
 3. $(a^3 - 5a^2b - 8ab^2)(-4a^4m^2)$
 4. $(a^{n+3} - 3an + 2 - 4a^{n+1} - a^n)(-a^n x^2)$
 5. $(a^8 - 3a^6b^2 + a^4b^4 - 3a^2b^6 + b^8)(-5a^3y^2)$
 6. $(a^m b^n + 3a^{m-1}b^{n+2} - a^{m-2}b^{n+4} + a^{m-3}b^{n+6})(4a^m b^3)$
 7. $(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}xy - \frac{1}{4}y^2)(\frac{3}{2}y^3)$
 8. $(3a - 5b + 6c)(-\frac{3}{10}a^2x^3)$
 9. $(\frac{2}{9}x^4 - x^2y^2 + \frac{1}{3}y^4)(\frac{3}{7}x^3y^4)$
 10. $(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{5}y^2)(-\frac{5}{8}a^2m)$
 11. $(\frac{2}{3}m^3 + \frac{1}{2}m^2n - \frac{5}{6}mn^2 - \frac{1}{9}n^3)(\frac{3}{4}m^2n^3)$
 12. $(\frac{2}{5}x^6 - \frac{1}{3}x^4y^2 + \frac{3}{5}x^2y^4 - \frac{1}{10}y^6)(-\frac{5}{7}a^3x^4y^3)$
-
-

3.4.3. Multiplicación de Polinomio por Polinomio

Para multiplicar tomamos el 1^{er} término del 1^{er} polinomio y lo multiplicamos con el 2^{do} polinomio, luego tomamos el 2^{do} término del 1^{er} polinomio y lo multiplicamos con el 2^{do} polinomio, y así continuamos sucesivamente hasta terminar con el polinomio.

♠ $(a + 5)(a^2 - 3) = a(a^2 - 3) + 5(a^2 - 3) = a^3 - 3a + 5a^2 - 15 = a^3 + 5a^2 - 15$

♠ $(a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots + a^n)(b + b^2 + b^3 + b^4 + b^5 + \dots + b^n) = a(b + b^2 + b^3 + \dots + b^n) + a^2(b + b^2 + b^3 + \dots + b^n) + a^3(b + b^2 + b^3 + \dots + b^n) + \dots + a^n(b + b^2 + b^3 + \dots + b^n) = ab + ab^2 + ab^3 + \dots + ab^n + a^2b + a^2b^2 + a^2b^3 + \dots + a^2b^n + a^3b + a^3b^2 + a^3b^3 + \dots + a^3b^n + \dots + a^nb + a^nb^2 + a^nb^3 + \dots + a^nb^n$



Actividad

Multiplicar:

1. $(a + 3)(a - 1)$
 2. $(6m - 5n)(-n + m)$
 3. $(x^2 + xy + y^2)(x - y)$
 4. $(m^3 - 3m^2n + 2mn^2)(m^2 - 2mn - 8n^2)$
 5. $(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)(x + y + z)$
 6. $(5y^4 - 3y^3 + 4y^2 + 2y)(y^4 - 3y^2 - 1)$
 7. $(a^x - a^{x+1} + a^{x+2})(a + 1)$
 8. $(a^{x-1} - b^{n-1})(a - b)$
 9. $(a^{2m+1} - 5a^{2m+2} + 3a^{2m})(a^{3m-3} + 6a^{3m-1} - 8a^{3m-2})$
 10. $(\frac{1}{5}a - \frac{1}{3}b)(\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b)$
 11. $(\frac{2}{5}m^2 + \frac{1}{3}mn - \frac{1}{2}n^2)(\frac{3}{2}m^2 + 2n^2 - mn)$
 12. $(\frac{1}{4}a^2 - ab + \frac{2}{3}b^2)(\frac{1}{4}a - \frac{3}{2}b)$
-
-

3.5. Mini Ensayo III

Expresiones del Álgebra

1. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa mejor al quíntuplo del cubo de un número cualquiera?

a) $(5x)^3$

b) $5x^3$

c) 5^3x

d) $(3x)^5$

e) $3x^5$

2. La expresión $6(x + 1) - x \div 2$ está mejor representada por:

a) El séxtuplo del sucesor de un número cualquiera menos el doble del mismo número.

b) El séxtuplo del antecesor de un número cualquiera menos la mitad del mismo número.

c) El séxtuplo del sucesor de un número cualquiera menos la mitad del mismo número.

d) La diferencia entre el séxtuplo de un número cualquiera y su mitad.

e) El exceso de la mitad de un número cualquiera sobre seis veces el mismo número.

3. La expresión $2a + 3b + 4c - (4a + 3b + 2c)$ es equivalente con:

a) $2(c - a)$

b) $4(c - a)$

c) $2(a - c)$

d) $6(a + b + c)$

e) $6b$

4. El producto entre un binomio y un monomio da por resultado:

a) Un monomio.

b) Un binomio.

c) Un trinomio.

d) Un término algebraico.

e) Una expresión de 3 términos algebraicos.

5. $4x^2y^3z^4\left(\frac{1}{4}x^{-2}y^2z^{-4} - \frac{1}{2}x^3y^{-3}z^{-4}\right) =$

a) $(y - \sqrt[5]{2}x)^5$

b) $y^5 - \sqrt[5]{2}x^5$

c) $y^5 - 2x^5$

d) $y^3 - 2x^4$

e) $z^5 - 2x^5$

6. ¿Cuántas unidades más tiene x que $2x - y$?

- a) $x - y$
- b) $y - x$
- c) $x + y$
- d) $y - 2x$
- e) $2x - y$

7. ¿Qué número hay que restar a $3a - 2b$ para obtener $a + b$?

- a) $2a - 3b$
- b) $2a - b$
- c) $4a + 3b$
- d) $4a - b$
- e) $4a - 3b$

8. El área de un rectángulo viene dada por $a \cdot b$, siendo a su largo y b su alto, ¿qué le sucederá al área del rectángulo si duplicamos su alto y cuadruplicamos su largo?

- a) Se duplica.
- b) Queda igual.
- c) Aumenta 4 veces.
- d) Aumenta en 8 unidades.
- e) Aumenta 8 veces.

9. ¿Que expresión algebraica representa a la sucesión de números ($\dots 9, 13, 17, 21, \dots$)?

- a) $9 + 2n$
- b) $4n + 5$
- c) $3n + 1$
- d) Todas
- e) Ninguna

10. La diferencia entre el cuadrado del sucesor de un número cualquiera y el doble de dicho número es:

- a) $x^2 + 1$
- b) $(x + 1)^2$
- c) $x^2 + 1 - 2x$
- d) $(x - 1)^2 - 2x$
- e) No se puede determinar.

11. ¿Cuál de las siguientes expresiones es FALSA?

- a) $1/6$ de hora equivale a 10 minutos.
 - b) $3/4$ de un día equivale a 18 horas.
 - c) $5/6$ de un año equivale a 10 meses.
-

- d) $1/8$ de kilo equivale a 125 gramos.
e) $1/6$ de un ángulo extendido equivale a 36° .
12. Si la mitad de n es igual al triple de m , entonces la mitad de m es:
- a) $\frac{n}{12}$
b) $n/6$
c) $\frac{n}{4}$
d) $n/3$
e) $\frac{n}{2}$
13. Al resolver $x - [x - (-x - y) - (-x)]$ se obtiene:
- a) $-2x - y$
b) $2x - y$
c) $2x + y$
d) $-2x + y$
e) $4x - y$
14. El valor de $a(a + b) - a(a - b)$ es:
- a) $2a + 2ab$
b) ab
c) $a^2 + ab$
d) $2a^2b$
e) $2ab$
15. ¿Qué fracción debe agregarse a 1 para obtener $\frac{9}{5}$?
- a) $1/5$
b) $2/5$
c) $3/5$
d) $4/5$
e) $-1/5$
16. “Al número n se le suma m , ésta suma se divide por k y el resultado se multiplica por p ”, se representa por:
- a) $(n + m \div k) \cdot p$
b) $(n + m \cdot p) \div k$
c) $n \div k + m \cdot p$
d) $[(n + m) \div k] \cdot p$
e) $n \cdot p + m \div k$
17. La expresión $(2x)^3$ se lee:



- a)* El doble del cubo de un número.
- b)* El doble del triple de un número.
- c)* El cubo del doble de un número.
- d)* El cubo del cuadrado de un número.
- e)* El triple del doble de un número.