

Capítulo 1

Números

Junto con la historia de la humanidad, la historia de las matemáticas y la numeración a evolucionado optimizándose cada vez más. En muchas culturas distintas se realizó la numeración de variados modos pero todos llegaban a una misma solución, definir una unidad y aumentarla en conjunto con el conteo, y posteriormente, cuando ya existía una cantidad incómoda de representar se involucraba un nuevo símbolo que representaba a todas las unidades anteriores, a éste último símbolo se le conoce como base, y sin lugar a duda la base más usada ha sido la base de 10, como lo hace el sistema de numeración que ocupamos actualmente, aparentemente a causa que tenemos 10 dedos y cada dedo representa una unidad y la manera más primitiva de contar.

1.1. Conjuntos

Cuando nos comunicamos en nuestra vida cotidiana y utilizamos el término “conjunto”, seguramente nos estamos refiriendo a un grupo de objetos de alguna naturaleza determinada. Bueno, en matemáticas esta expresión no está para nada alejada de lo que tu entiendes por un conjunto, la diferencia radica en que los conjuntos que aprenderemos son aquellos que están formados por nada más ni nada menos que números. Los números son elementos fundamentales en el estudio de las matemáticas, ya que gracias a ellos se pueden precisar o determinar exactamente respuestas a algunas de las preguntas del ser humano, es por esto que es tan importante analizarlos, trabajarlos y lo que haremos en este capítulo, agruparlos.

1.1.1. Subconjuntos

Los subconjuntos son esencialmente conjuntos, pero el prefijo sub. que aparece delante nos infiere que existe un conjunto más grande del que estamos hablando. Uno en el cual nuestro subconjunto está contenido. Por ejemplo; si queremos formar el conjunto formado por todas las personas involucradas en nuestro preuniversitario, encontraremos en él a profesores, alumnos y coordinadores, y un subconjunto de este sería el grupo de todos los profesores, ya que éstos por sí solos forman un conjunto, pero éste está contenido en el primer conjunto nombrado.

1.1.2. Representación

Para representar un conjunto cualquiera, generalmente se usa una línea que encierra a un grupo de cosas, las cuales, forman el conjunto. Una manera análoga es ordenarlos, separados de comas y entre paréntesis de llave ($\{\}$)¹ esta última notación es la que utilizaremos frecuentemente.

¹Ejemplo de un conjunto $\mathcal{A}=\{a,b,c,d,e\}$

1.1.3. Cardinalidad

Cuando queremos hablar de cantidades dentro de los conjuntos, o aclarar si un conjunto es más grande o no que otro, introducimos un término que llamamos cardinalidad, la cual representamos por el símbolo #, ésta solo depende del número de objetos de nuestro conjunto.

Por ejemplo, la cardinalidad del conjunto de la figura 1.1 es 4.

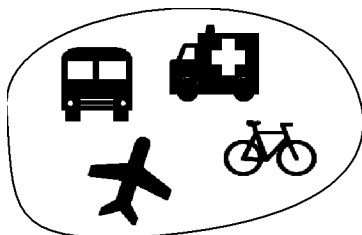


Figura 1.1: Conjunto de objetos

1.2. Conjuntos Numéricos

Son todos aquellos conjuntos que están formados por números, éstos se dividen principalmente en:

1.2.1. Números Naturales

Los números naturales son los que normalmente ocupamos para contar, se representan por el símbolo \mathbb{N} . Y sus elementos son:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots \infty\}$$

▪ **Algunos subconjuntos de \mathbb{N} son:**

- Los números pares = $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots \infty\}$, éstos los podemos representar como $2n \forall n \in \mathbb{N}$
- Los números impares = $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots \infty\}$, los cuales los podemos representar como $(2n + 1)$ o $(2n - 1) \forall n \in \mathbb{N}$
- Los números primos = $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots \infty\}$, son todos aquellos números que son divisibles solo por si mismos y por 1, excluyendo a éste último.
- Los números compuestos, Son todos aquellos que NO son primos.
- etc...

◇

Observa que...

- † La cardinalidad de \mathbb{N} es infinita.
 - † Este conjunto es “cerrado” bajo la suma y la multiplicación, es decir, para todo par de números en \mathbb{N} , su suma y su multiplicación también es un número natural.
 - † Este conjunto NO es “cerrado” bajo la resta y la división, ya que para todo par de números en \mathbb{N} , su diferencia y división NO es necesariamente un número natural.
 - † 2 es el único número par que es primo.
-
-

1.2.2. Números Cardinales

Cuando en el conjunto de los números naturales incluimos el 0, se denomina como Números Cardinales, se representa por el símbolo \mathbb{N}_0 , y sus elementos son:

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, \infty\}$$

▪ Algunos subconjuntos de \mathbb{N}_0 son:

- Los números Naturales y todos los subconjuntos de éste.
- Los dígitos; = $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

1.2.3. Números Enteros

Es el conjunto formado por todos los números sin cifra decimal, es decir, los números naturales, sus inversos aditivos², y el neutro aditivo³.

$$\mathbb{Z} = \{-\infty \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \infty\}$$

▪ Algunos subconjuntos de \mathbb{Z} son:

- Los números Naturales.
- Los números Cardinales.
- etc...

◇

Observa que...

A diferencia de los números Naturales, este conjunto si es “cerrado” bajo la suma, la resta y la multiplicación; es decir, para todo par de números enteros, su suma, multiplicación y diferencia es siempre un número entero.

Pero como el mundo no es tan bello, éste conjunto no conserva a la división, ya que una división entre dos números enteros no es necesariamente un número de \mathbb{Z}

²Se dice que un número a tiene inverso aditivo, si existe un b tal que, $a + b = 0$, tal b es también conocido como $-a$.

³Para cualquier número x existe un único que cumple que $x + (\text{ese único}) = x$, a ese número lo conocemos como neutro aditivo, (también conocido como 0).

1.2.4. Números Racionales

Como te habrás dado cuenta en los conjuntos anteriormente mencionados, tenemos el problema de que sus elementos se pueden “escapar” fácilmente de ellos, nos referimos a que basta que dos números Naturales se resten ($4 - 5$, por ejemplo), para obtener algún número negativo y entonces ya estaremos fuera de \mathbb{N} , o para el caso de los enteros, basta que dos de ellos que no sean divisibles entre si (-3 y 2 , por ejemplo), se dividan y entonces ya no tendremos un número entero.

Para resolver éste problema, existe el conjunto de los números Racionales, representados por el símbolo \mathbb{Q} y que cumple que para cada par de números racionales, la suma, resta, división y multiplicación (sin considerar al 0), es siempre un número de \mathbb{Q} , a éste tipo de conjuntos se les conoce como **Cuerpo**. Lo podemos representar como:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Para cada elemento de éste cuerpo aparecen en el mismo, los llamados inversos multiplicativos, que son aquellos que al multiplicarse por el elemento obtenemos el 1 (neutro multiplicativo). Por ejemplo: $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$, por lo tanto el inverso multiplicativo de 5 es $\frac{1}{5}$, o $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1$, por lo tanto el inverso multiplicativo de $\frac{3}{4}$ es $\frac{4}{3}$.

Existen distintas formas de expresar los elementos de este conjunto.

Forma Fraccionaria

Ésta forma nos expresa “porciones” de algún entero. En su estructura tenemos una línea fraccionaria, un numerador (número sobre la línea fraccionaria), y un denominador (número bajo la línea fraccionaria). El denominador nos indica la cantidad de partes en que dividimos un entero y el numerador nos muestra cuantas de ellas vamos a considerar.

Por ejemplo:

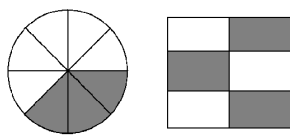


Figura 1.2: Representaciones Fraccionarias

En el primer caso dividimos un círculo en 8 partes iguales, y de ellas ocupamos 3 , lo cual representamos por: $\frac{3}{8}$. Y en el segundo caso dividimos un rectángulo en 6 partes iguales, considerando sólo 3 de ellas, lo cual representamos por: $\frac{3}{6}$

Forma Mixta

Hay ocasiones en que el numerador de una fracción es mayor que el denominador. En éstas situaciones dividimos el numerador por el denominador, del resultado de esta división consideramos el cociente como la parte entera, y el resto como numerador de la fracción que la acompaña.

Por ejemplo:

Consideremos la fracción $\frac{8}{5}$, entonces al efectuar la división se tiene.

$$8 \div 5 = 1 \\ 3.$$

Por lo tanto podemos escribir esta fracción como: $\frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$.

Forma Decimal

Toda fracción tiene su representación como número decimal, para obtenerlo basta dividir, sin dejar resto, el numerador con el denominador.

Por ejemplo, consideremos la fracción $\frac{5}{4}$:

$$5 \div 4 = 1,25 \\ 10 \\ 20 \\ 0.$$

Para pasar un número decimal a fracción existen 3 posibles casos:

1. Con Decimales Finitos

Es decir, cuándo las cifras decimales de un número son finitas, por ejemplo 4,376 es un decimal finito pues tiene solo 3 dígitos después de la coma, pero 4,333333333333... con infinitos 3, uno tras otro, no es un decimal finito pues tiene infinitos dígitos después de la coma.

La manera de pasar este tipo de decimales a fracción es simplemente escribir una fracción cuyo numerador sea el mismo número pero sin coma, y cuyo denominador sea 1000... con tantos ceros como dígitos tiene el número después de la coma, por ejemplo:

$$\spadesuit \underbrace{5,326}_{3 \text{ dígitos}} = \frac{5626}{1000} \\ \spadesuit \underbrace{2,32}_{2 \text{ dígitos}} = \frac{232}{100} \\ \spadesuit \underbrace{1,3}_{1 \text{ dígitos}} = \frac{13}{10}$$

Esto es debido a que cuando uno divide por 10, 100, 1000, etc, lo único que le sucede al dividendo es que se corre la coma hacia la izquierda tantos espacios como ceros posee el divisor.

2. Decimales Periódicos

Los decimales periódicos son aquellos en que los números después de la coma se repiten infinitamente sin alterar su orden, por ejemplo:

- ♠ 1,33333333333333... es un número decimal donde el 3 se repite infinitas veces después de la coma, este número lo escribiremos de la forma: $1,\overline{3}$.
- ♠ 4,324324324324324... es un número decimal donde el número 324 se repite infinitamente después de la coma, este número lo escribiremos de la forma: $4,\overline{324}$

- ♠ $2,56565656723214569875\dots$ es un número cuyos decimales no tienen ninguna relación por lo tanto se dice que NO es un decimal periódico.

La fracción que representa a estos decimales es aquella cuyo numerador es el número escrito sin coma ni línea periódica menos la parte entera dividido por $999\dots$ con tantos 9 como decimales periódicos halla, por ejemplo:

- ♠ $1, \overline{32} = \frac{132-1}{99} = \frac{131}{99}$
- ♠ $1, \overline{586} = \frac{1586-1}{999} = \frac{1585}{999}$
- ♠ $6, \overline{2} = \frac{62-6}{9} = \frac{56}{9}$
- ♠ $12, \overline{432} = \frac{12432-12}{999} = \frac{12420}{999}$

3. Decimales Semiperiódicos

Los decimales semiperiódicos son aquellos en que ahí cifras decimales que aparecen solo una vez y las demás se repiten infinitamente, por ejemplo:

- ♠ $1,2333333333333333\dots$ es un número decimal donde el 3 se repite infinitas veces después del 1, este número lo escribiremos de la forma: $1,2\overline{3}$.
- ♠ $3,321111111111111111\dots$ es un número decimal donde el número 1 se repite infinitamente después del 32, este número lo escribiremos de la forma: $3,32\overline{1}$
- ♠ $2,5323232323232323232323232323232\dots$ es un número decimal donde el número 32 se repite infinitamente después del 5, este número lo escribiremos de la forma: $2,5\overline{32}$

La fracción que representa a estos decimales es aquella cuyo numerador es el número escrito sin coma ni línea periódica menos la parte no periódica del número, dividido por $999\dots0000\dots$ con tantos 9 como decimales periódicos halla y tantos ceros como dígitos no periódicos halla después de la coma, por ejemplo:

- ♠ $1, \overline{32} = \frac{132-13}{90} = \frac{119}{90}$
- ♠ $2, 5\overline{61} = \frac{2561-256}{900} = \frac{2305}{900}$
- ♠ $6, \overline{123} = \frac{6123-61}{990} = \frac{6062}{990}$
- ♠ $12, 0\overline{6} = \frac{1206-120}{90} = \frac{1086}{90}$

■ Algunos subconjuntos de \mathbb{Q} son:

- Los números Naturales, ya que todo número natural n lo podemos escribir como $\frac{n}{1}$.
- Los números Cardinales.
- Los números Enteros ya que todo número entero z lo podemos escribir como $\frac{z}{1}$.
- etc...

1.2.5. Números Irracionales

Es el conjunto de todos los números que no pertenecen al mundo de los racionales, es decir no se pueden escribir como fracción ya que tienen infinitos decimales sin ninguna relación. Una forma de enunciar sus elementos es:

$$\mathbb{I} = \{ i \mid i \notin \mathbb{Q} \}$$

Algunos elementos de éste conjunto son: $\pi, e, \sqrt{2}, etc\dots$

◇

Observa que...

Entre el conjunto de los números racionales y el de los irracionales no existe ningún elemento en común.

Además, NO es un cuerpo, ya que sus elementos al sumarse, restarse, multiplicarse, o dividirse pueden obtener un número racional, como por ejemplo; $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$, y 1 no es un número irracional.

1.2.6. Números Reales

Es el conjunto que obtenemos entre la unión de todos los conjuntos que acabamos de ver, pero como te habrás dado cuenta, en los números racionales están ya incluidos los naturales y los enteros, entonces basta decir que:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

En la figura 1.3 puedes observar gráficamente éste hecho.

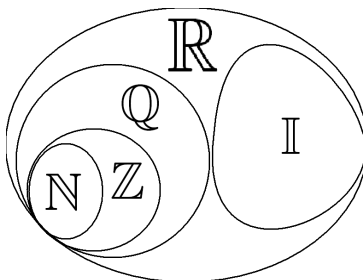


Figura 1.3: Diagrama de los conjuntos numéricos básicos

1.3. Operatoria con los números Reales

1.3.1. Axiomas de Cuerpo

1. Conmutatividad:

Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que:

$$a + b = b + a \quad \text{y} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

2. Asociatividad:

Para todo a, b y $c \in \mathbb{R}$, se cumple que:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{y} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

3. Distributividad:

Para todo a, b y $c \in \mathbb{R}$, se cumple que:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

1.3.2. Mínimo Común Múltiplo

El mínimo común múltiplo (M.C.M), entre dos o más números reales es el número más pequeño entre todos los múltiplos que tengan en común. Por ejemplo, para determinar el M.C.M entre 4 y 6 veamos los conjuntos de sus múltiplos.

$$\rightarrow \text{Múltiplos de } 4 = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, \dots\}$$

$$\rightarrow \text{Múltiplos de } 6 = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, \dots\}$$

$$\rightarrow \text{Y la intersección entre éstos dos conjuntos es } = \{\mathbf{12}, 24, 36, 48, \dots\}$$

Luego, como el mínimo de éste último conjunto es 12, entonces el M.C.M. entre 4 y 6 es 12. Otra forma de determinar el M.C.M. es con la siguiente tabla:

$$\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & \div 2 \\ \hline 2 & 3 & \div 2 \\ 1 & 3 & \div 3 \\ & 1 & \end{array}$$

Donde se va dividiendo a los números hasta obtener el 1 para ambos, luego el M.C.M. será la multiplicación entre los divisores usados.

De manera que obtenemos:

$$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

1.3.3. Máximo Común Divisor

Cuando nos referimos al divisor de un número real estamos hablando de un número que divide exactamente (sin dejar resto) al número en cuestión. El máximo común divisor (M.C.D) entre dos o más números reales es el divisor más grande que tienen en común. Por ejemplo, busquemos el máximo común divisor entre 16 y 40, para ello necesitamos conocer los conjuntos de sus respectivos divisores.

$$\rightarrow \text{Divisores de } 16 = \{1, 2, 4, 8, 16\}$$

$$\rightarrow \text{Divisores de } 40 = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$$

$$\rightarrow \text{Y la intersección entre éstos dos conjuntos es } = \{1, 2, 4, \mathbf{8}\}$$

Por lo tanto el M.C.D. entre 16 y 40, es 8.



Observa que...

El mínimo común múltiplo y el máximo común divisor entre dos o más números enteros siempre existe, ya que en el peor de los casos el M.C.M será la multiplicación entre ellos, y el M.C.D. será el 1.

1.3.4. Reglas de Multiplicidad y Divisibilidad

Para multiplicar o dividir números reales debes tener en cuenta que su signo (positivo o negativo), importa mucho al momento de operarlos. Para esto siempre considera la siguiente tabla:

+	·	+	=	+
-	·	-	=	+
+	·	-	=	-
-	·	+	=	-

O si te es más sencillo, considera la palabra “amigo” como positivo (+), y “enemigo” como negativo (-), y recuerda que:

- “El amigo de mi amigo es mi amigo”
- “El enemigo de mi enemigo es mi amigo”
- “El amigo de mi enemigo es mi enemigo”
- “El enemigo de mi amigo es mi enemigo”

Además para que te sea más fácil la obtención de divisores o múltiplos comunes es bueno tener presente que:

- Todos los números son divisibles por 1.
- Los números divisibles por 2, son todos aquellos cuyo último dígito es par o 0.
- Los números divisibles por 3, son todos aquellos que cumplen que la suma de sus dígitos es divisible por 3.
- Los números divisibles por 4, son todos cuyos últimos dos dígitos forman un número divisible por 4.
- Los números divisibles por 5, son todos aquellos que terminan en 5 o 0.
- Los números divisibles por 6, son todos aquellos que son divisibles por 2 y por 3 al mismo tiempo.

1.3.5. Orden Operatorio

Siempre al momento de desarrollar un ejercicio donde aparezcan sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias, etc, debes tener presente que existe una prioridad en el desarrollo de éstas, es decir; hay operaciones que deben realizarse antes que otras para obtener el resultado correcto. Éste orden es el siguiente:

1. Potencias.
2. Multiplicaciones y divisiones.
3. Sumas y restas.

Además si aparecen paréntesis dentro de algún ejercicio nos indicará que debemos realizar primero las operaciones que están dentro de él.

Por ejemplo:

$$6 + 4 \cdot (14 - 2^2 \cdot 3) - 26 \div 2$$

Primero debemos realizar el paréntesis (la potencia, luego la multiplicación y después la resta). Luego la multiplicación por 4 y la división $26 \div 2$. Posteriormente terminamos con las sumas y restas. Entonces se vería algo así:

$$\begin{aligned} 6 + 4 \cdot (14 - 2^2 \cdot 3) - 26 \div 2 &= 6 + 4 \cdot (14 - 4 \cdot 3) - 26 \div 2 \\ &= 6 + 4 \cdot (14 - 12) - 26 \div 2 \\ &= 6 + 4 \cdot (2) - 26 \div 2 \\ &= 6 + 8 - 26 \div 2 \\ &= 6 + 8 - 13 \\ &= 14 - 13 \\ &= 1 \end{aligned}$$



Actividad

Resuelve los siguientes ejercicios combinados:

- | | |
|---|--|
| 1. $-(2 + (3 \cdot 3 + 5)) =$ | 5. $(6 \cdot 2 \cdot 3 - [2 \cdot (-45) + 112]) =$ |
| 2. $(6 \div 3 - (1 + 2 \cdot 3 - 1)) \cdot 2 =$ | 6. $-(-[-(12 \div 4 + 5)]) + 1 =$ |
| 3. $-(65 - [2 - (10 \div 2)]) + (5 \cdot 3 \div 5) =$ | 7. $-[-3 + 4 \cdot 3 - 4 - (-5 + 2)] =$ |
| 4. $5 \cdot (10 + 3 \cdot 3 + 48 \div 6 - 7) =$ | 8. $-(-(2 + 3) - (3 \cdot 6 + 5) + 2) =$ |

1.3.6. Operaciones con Fracciones

Multiplicación de Fracciones

Multiplicar fracciones es muy sencillo, basta multiplicar sus numeradores y éste será el numerador del resultado, para el denominador se realiza el mismo procedimiento.

Veamos algunos ejemplos:

$$\rightarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{7} = \frac{3 \cdot 6}{2 \cdot 7} = \frac{18}{14}$$

$$\rightarrow \frac{5}{4} \cdot 2 = \frac{5 \cdot 2}{4 \cdot 1} = \frac{10}{4}$$

$$\rightarrow \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4 \cdot 1}{3 \cdot 5} = \frac{4}{15}$$

División de Fracciones

Dividir fracciones es un poco más complicado ya que debemos realizar lo que llamamos una multiplicación cruzada, es decir; el numerador del resultado de una división será lo que obtengamos de multiplicar el numerador del dividendo con el denominador del divisor, de la misma forma el denominador del resultado será lo que obtengamos de multiplicar el denominador del dividendo con el numerador del divisor.

Como lo anterior parece ser más complicado de lo que realmente es, también podemos “transformar” la división en una multiplicación y realizar la operación de ‘esta forma que ya conocemos, recuerda que dividir no es otra cosa que multiplicar por el inverso multiplicativo del divisor.

Veamos algunos ejemplos:

$$\rightarrow \frac{5}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{8}$$

$$\rightarrow \frac{9}{5} \div 4 = \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{20}$$

$$\rightarrow \frac{6}{5} \div \frac{1}{3} = \frac{6}{5} \cdot 3 = \frac{18}{5}$$

Adición y Sustracción de Fracciones

Antes de continuar vamos a aclarar dos conceptos muy importantes al momento de sumar y restar fracciones, la amplificación y la simplificación.

† Amplificar

Significa aumentar el numerador y el denominador de una fracción en la misma proporción. Por ejemplo, amplifiquemos $\frac{2}{3}$ por 5.

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{5} = \frac{10}{15}$$

Éstas dos fracciones son llamadas equivalentes, es decir, representan la misma cantidad.

† Simplificar

Análogamente simplificar significa disminuir el numerador y el denominador de una fracción (si es que se puede), en una misma proporción. Por ejemplo, simplifiquemos $\frac{150}{90}$:

$$\frac{150}{90} = \frac{15}{9} \cdot \frac{10}{10} = \frac{15}{9} \cdot 1 = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{3} = \frac{5}{3} \cdot 1 = \frac{5}{3}$$

En el proceso anterior primero simplificamos por 10 y luego por 3, obteniendo una fracción irreducible (que no se puede simplificar).

Antes de realizar cualquier operación con fracciones es recomendable simplificar lo más que se pueda.

Ahora, para sumar o restar fracciones tenemos dos casos: cuando tienen igual denominador y cuando no.

Para el primer caso no existe gran problema ya que consiste simplemente en operar solo los numeradores, dejando intacto al denominador. Por ejemplo:

$$\rightarrow \frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{2+7}{5} = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}$$

$$\rightarrow \frac{6}{7} - \frac{9}{7} = \frac{6-9}{7} = \frac{-3}{7} = -\frac{3}{7}$$

En cambio para el segundo caso donde tenemos distintos denominadores debemos amplificar cada una de las fracciones en juego de forma tal que obtengamos el mismo denominador en ambas, el cual no será al azar, más bien será el mínimo común múltiplo entre los denominadores de las fracciones. Por ejemplo:

$$\rightarrow \frac{5}{4} + \frac{7}{6} = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{3} + \frac{7}{6} \cdot \frac{2}{2} = \frac{15}{12} + \frac{14}{12} = \frac{15+14}{12} = \frac{29}{12}$$

En el ejemplo anterior primero encontramos el M.C.M entre 6 y 4, que es 12, luego buscamos los números por los que debíamos amplificar cada fracción para obtener este denominador en ambas encontrando el 3 para la primera y el 2 para la segunda. Posteriormente obtuvimos una suma entre fracciones de igual denominador que ya sabemos operar.

Otro ejemplo:

$$\rightarrow \frac{9}{5} - \frac{3}{4} = \frac{9}{5} \cdot \frac{4}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{5} = \frac{36}{20} - \frac{15}{20} = \frac{36-15}{20} = \frac{21}{20}$$



Actividad

Suma o resta según corresponda las siguientes fracciones:

- | | |
|--|---|
| 1. $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} =$ | 7. $\frac{3}{2} + \frac{7}{9} + \frac{-8}{4} =$ |
| 2. $\frac{5}{4} - \frac{1}{4} =$ | 8. $\frac{5}{11} + \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} =$ |
| 3. $\frac{7}{2} + \frac{4}{3} =$ | 9. $\frac{41}{36} + \frac{31}{72} + 1 =$ |
| 4. $\frac{9}{4} + \frac{-2}{6} =$ | 10. $\frac{60}{6} + \frac{6}{48} - \frac{15}{20} + \frac{12}{36} - \frac{24}{18} =$ |
| 5. $\frac{1}{4} - \frac{5}{6} + \frac{2}{3} =$ | 11. $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} - \frac{m \cdot n}{n} =$ |
| 6. $\frac{4}{5} - \frac{4}{3} + \frac{4}{3} =$ | 12. $\frac{1}{1+\frac{1}{2}} + \frac{2}{2+\frac{2}{3}} + \frac{3}{3+\frac{3}{4}} =$ |

1.3.7. Potenciación y Radicación

Potencias

Esencialmente una potencia nos representa una multiplicación por sí mismo de un número que llamamos “base”, tantas veces como lo indique otro número que llamamos “exponente”.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

↖ Exponente
↖ Base

■ Propiedades

Consideremos $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $m, n \in \mathbb{Z}$

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m} = a^{m \cdot n} = (a^m)^n$



Actividad

Utilizando las propiedades de las potencias, realiza los siguientes ejercicios:

- | | | | |
|--|---|-----------------------------------|--|
| 1. $\left(\frac{1}{4}\right)^2$ | 6. $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}\right)^{-3}$ | 11. $\left(1\frac{2}{5}\right)^4$ | 16. $\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{3}{4}\right)^3$ |
| 2. $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ | 7. $(2 \cdot 6)^2$ | 12. $\left(4\frac{2}{3}\right)^3$ | 17. $\left(\frac{2}{5} \cdot 10^2\right)^3$ |
| 3. $\left(\frac{6}{5}\right)^{-2}$ | 8. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{6}{5} \cdot 4\right)^2$ | 13. $\left(3\frac{1}{3}\right)^6$ | 18. $\left(\frac{5}{6} \cdot 1\frac{1}{5} \cdot 0,01\right)^5$ |
| 4. $\left(\frac{10}{5}\right)^{-(-2)}$ | 9. $\left(\frac{6 \cdot 3}{5}\right)^4$ | 14. $\left(1\frac{1}{2}\right)^8$ | 19. $\left(0,02 \cdot 0,1^2 \cdot \frac{3}{2^3}\right)^4$ |
| 5. $\left(\frac{2}{10}\right)^3$ | 10. $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\right)^3$ | 15. $\left(2\frac{1}{4}\right)^4$ | 20. $\left(\left(\frac{8}{3}\right)^3\right)^2$ |

Raíces

Las raíces son casos más generales de las potencias, ya que corresponden a una potencia, pero de índice racional.

Decimos que una raíz n -ésima de un número a es b , si y solo si la n -ésima potencia de b es a , es decir:

$$\begin{array}{c} \text{Índice de la raíz} \\ \swarrow \\ \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \\ \nwarrow \\ \text{Cantidad Sub-radical} \end{array}$$

■ Propiedades

Consideremos $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $m, n \in \mathbb{Z}$

- $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$, con ésta propiedad podemos generalizar las mismas propiedades de las potencias a las raíces.
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
- $a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$



Actividad

Utilizando las propiedades de las raíces, realiza los siguientes ejercicios:

- | | | |
|--|--|--------------------------------------|
| 1. $\sqrt{4 \cdot 16}$ | 6. $\sqrt[9]{-\left(\frac{56}{\pi^4}\right)^0}$ | 11. $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 216}$ |
| 2. $\sqrt{9 \cdot 16 \cdot 25}$ | 7. $\sqrt[8]{\left(\frac{64}{9}\right)^4}$ | 12. $\sqrt{2^8 \cdot 3^6}$ |
| 3. $\sqrt[3]{8 \cdot 64}$ | 8. $\left(\frac{81}{36} \cdot 25\right)^{\frac{2}{4}}$ | 13. $\sqrt[3]{2 \cdot 3^2}$ |
| 4. $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$ | 9. $\sqrt[3]{-27 \cdot 721}$ | 14. $\sqrt{5 \cdot \sqrt[3]{3^2}}$ |
| 5. $\sqrt[3]{\frac{-1}{8} \cdot \frac{27}{1}}$ | 10. $\sqrt[5]{-32 \cdot 243 \div 1024}$ | 15. $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ |

1.3.8. Notación Científica

La notación científica es una herramienta que ocupamos para poder escribir números demasiado pequeños o demasiado grandes con el fin de reducir espacio en su escritura.

Por ejemplo, 5.000.000.000.000.000.000, es un número bastante grande, por lo que aprenderemos que podemos escribir éste número como 5×10^{21} , cuya notación es claramente más eficiente.

Potencias de 10

Son aquellas potencias que tienen base igual a 10, y exponente entero. Son potencias de la forma:

$$10^n \forall n \in \mathbb{Z}$$

Estas potencias cuando el exponente es positivo, nos indica la cantidad de ceros que vamos a poner a la derecha del número 1. De la misma forma para los enteros negativos nos indicará la cantidad de ceros que vamos a poner a la izquierda del 1. Es decir:

$$\begin{array}{ll}
 10^0 = 1 & 10^{-1} = 0,1 \\
 10^1 = 10 & 10^{-2} = 0,01 \\
 10^2 = 100 & 10^{-3} = 0,001 \\
 10^3 = 1000 & 10^{-4} = 0,0001 \\
 10^4 = 10000 & 10^{-5} = 0,00001 \\
 \vdots & \vdots
 \end{array}$$

De esta forma podemos expresar las unidades, decenas, centenas, milésimas, decenas de milésimas, etc . . . Reemplazando por éstas potencias de 10 se tiene por ejemplo:

$$\begin{aligned}
 \rightarrow 5000 &= 5 \text{ unidades de mil} = 5 \cdot \underbrace{1000}_{3 \text{ ceros}} = 5 \cdot 10^3 \\
 \rightarrow 20000 &= 2 \text{ decenas de mil} = 2 \cdot \underbrace{10000}_{4 \text{ ceros}} = 2 \cdot 10^4 \\
 \rightarrow 300000000 &= 3 \text{ centésimas de millonésima} = 3 \cdot \underbrace{100000000}_{8 \text{ ceros}} = 3 \cdot 10^8
 \end{aligned}$$

Así podemos ver que este tipo de escritura nos puede ser de mucha utilidad cuando deseemos expresar números excesivamente grandes. Pero también utilizando exponentes negativos podemos obtener el mismo resultado, esta vez con números pequeños. Por ejemplo:

$$\rightarrow 0,0000000005 = 5 \cdot \underbrace{0,0000000001}_{10 \text{ ceros}} = 5 \cdot 10^{-10}$$

Descomposición de números con potencias de 10

También podemos ocupar a las potencias de diez para descomponer números, ya que como cuando lo hacíamos en enseñanza básica, los números los podemos separar en una suma de unidades, decenas, centenas, etc. . . , y las potencias de base diez son precisamente eso. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
 4580403 &= 4000000 + 500000 + 80000 + 400 + 3 \\
 &= 4 \cdot 1000000 + 5 \cdot 100000 + 8 \cdot 10000 + 4 \cdot 100 + 3 \cdot 1 \\
 &= 4 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^0 \\
 \\
 256,4 &= 200 + 50 + 6 + 0,4 \\
 &= 2 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 0,1 \\
 &= 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1}
 \end{aligned}$$

Ahora; llamamos específicamente notación científica cuando escribimos cualquier número representado por un número, con un solo dígito antes de la coma, multiplicado por una potencia de diez. Este dígito es el primero del valor original, por ejemplo:

Escribamos el número 65.300.000 con notación científica, entonces tenemos que escribir un número de un solo dígito antes de la coma que multiplicado por alguna potencia de diez resulte

65.300.000. Dicha potencia de diez resulta tener el exponente igual a la cantidad de espacios que vamos a correr la coma.

Entonces:

$$\rightarrow \underbrace{65.300.000}_{7 \text{ espacios}} = 6,53 \times 10^7$$

Otros ejemplos:

$$\rightarrow \underbrace{4.568.000}_{6 \text{ espacios}} = 4,568 \times 10^6$$

$$\rightarrow \underbrace{12.050.000}_{7 \text{ espacios}} = 1,205 \times 10^7$$

$$\rightarrow 0,\underbrace{0003}_4 \text{ espacios} 2 = 3,2 \times 10^{-4}$$

$$\rightarrow 0,\underbrace{00000000000000061}_{15 \text{ espacios}} = 6,1 \times 10^{-15}$$



Actividad

1. Escribe los siguientes valores con notación científica:

- | | |
|----------------------|----------------------------------|
| 1. 0,00001 = | 6. 0,00000639 = |
| 2. 0,0000000000235 = | 7. 0,00000001001 = |
| 3. 125.230 = | 8. 123.200.000 = |
| 4. 1.235.300 = | 9. 998.000.000.000.000.000.000 = |
| 5. 85.325.000.000 = | 10. 0,000000000000000009 = |

2. Escribe los siguientes números como decimales sin notación científica:

- | | |
|----------------------------|-----------------------------|
| 1. $1,2 \times 10^2 =$ | 5. $6,022 \times 10^{23} =$ |
| 2. $3,456 \times 10^6 =$ | 6. $1,62 \times 10^{-32} =$ |
| 3. $1,56 \times 10^{-3} =$ | 7. $2,99 \times 10^8 =$ |
| 4. $9,99 \times 10^9 =$ | 8. $5,99 \times 10^{-28} =$ |
-
-

1.4. Mini Ensayo I Números

1. $3 + 2 \cdot 4 - (-1)^2 =$

- a) 21
- b) 19
- c) 12
- d) 10
- e) Otro valor

2. Un número entero p se compone de dos dígitos que son de izquierda a derecha a y b respectivamente, entonces el inverso aditivo de p es:

- a) $10a + b$
- b) $-10a + b$
- c) $10b + a$
- d) $-10a - b$
- e) $-10b - a$

3. Si a es un número natural y b un número cardinal, entonces puede darse que:

- a) $a + b = 0$
- b) $a \div b = 0$
- c) $b \div a = 0$
- d) $a + b^2 = b$
- e) $b^a + 1 = 0$

4. Si m y n son números naturales impares, entonces es (son) siempre un número par:

- I. $m + n$
 - II. $m - n$
 - III. $m \cdot n$
 - IV. $m + 1$
- a) Solo I
 - b) Solo II y IV
 - c) Solo I y IV
 - d) Solo III y IV
 - e) I, II y IV

5. Si se divide el mínimo común múltiplo por el máximo común divisor entre los números 30, 54, 18 y 12; se obtiene:

- a) 5
- b) 15
- c) 30
- d) 45
- e) 90

6. Si a , b y c son respectivamente los tres primeros números primos, entonces $a + b + c =$

- a) 6
- b) 10
- c) 15
- d) 17
- e) 30

7. ¿Cuántos elementos en común tiene el conjunto de los divisores de 18 y 16?
- a) Ninguno
 - b) 1
 - c) 2
 - d) 3
 - e) 4
8. Si se duplica la expresión 2^4 se obtiene:
- a) 2^5
 - b) 2^8
 - c) 4^2
 - d) 4^5
 - e) 4^6
9. Si n es un número tal que $n \in \mathbb{Z}$, entonces ¿cuál(es) de las siguientes expresiones representa(n) tres números pares consecutivos?
- I. $2n, 2n + 1, 2n + 2$
 - II. $4n, 4n + 2, 4n + 4$
 - III. $2n - 4, 2n - 2, 2n$
- a) Solo III
 - b) I y II
 - c) I y III
 - d) II y III
 - e) Todas
10. Sea el conjunto $A = \{1, 2, 5, 8, 9, 11\}$, entonces la cantidad de elementos que existen entre la intersección de A con el conjunto de los números primos es:
- a) 2
 - b) 3
 - c) 4
 - d) 5
 - e) 6
11. Se define $(a, b) * (c, d) = (ad + bc, ab - cd)$, entonces $(2, 1) * (3, 2) =$
- a) (3,1)
 - b) (7,5)
 - c) (8,4)
 - d) (8,-4)
 - e) (7,-4)

12. El séxtuplo del número par consecutivo de 8 es:

- a) 16
- b) 36
- c) 48
- d) 60
- e) 80

13. Si $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{N}$, entonces el conjunto mas pequeño al que pertenece siempre $\frac{a}{b}$ es:

- a) \mathbb{R}
- b) \mathbb{I}
- c) \mathbb{Z}
- d) \mathbb{Q}
- e) \mathbb{N}

14. $\sqrt[3]{-8} + 2 \cdot 14^0 =$

- a) 4
- b) 3
- c) 2
- d) 1
- e) 0

15. 5.432 es equivalente con:

- a) $5 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 + 2$
- b) $5 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1$
- c) $5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10$
- d) $5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 + 2$
- e) $5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$

16. ¿Cuál de las siguientes expresiones NO es racional?

- a) $3/0$
- b) $2/6$
- c) 0,3
- d) $\frac{5}{3}$
- e) $\frac{-1}{-(-5)}$

17. Al amplificar por 2 el racional $\frac{3}{4}$ resulta:

- a) $\frac{6}{8}$
- b) $3/8$
- c) $\frac{6}{4}$

d) 3,2

e) $\frac{3}{2}$

18. Que número dividido por $\frac{5}{p}$ da como resultado $\frac{p}{5}$.

a) $\frac{p^2}{5}$

b) $\frac{p}{5}$

c) $\frac{5}{p}$

d) $\left(\frac{p}{5}\right)^2$

e) 1

19. Al ordenar los números 8, $\frac{1}{6}$, 4, $\frac{3}{4}$, 5, $\frac{1}{2}$, 7, $\frac{1}{9}$ en forma decreciente, el quinto término es:

a) $\frac{1}{9}$

b) 5

c) $\frac{1}{2}$

d) 4

e) $\frac{3}{4}$

20. Si $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{3}$, entonces $\frac{1}{a+b} =$

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{6}{5}$

c) $\frac{1}{6}$

d) 6

e) 5

21. $1^1 + 2^2 + 3^3 =$

a) 2^5

b) 2^6

c) 3^5

d) 3^9

e) 6^6

22. Si a la mitad de la unidad se le resta la unidad se obtiene:

a) 0

b) $-\frac{3}{2}$

c) $-\frac{1}{2}$

d) $\frac{3}{2}$

e) $\frac{1}{2}$

23. ¿Cuántas veces esta contenida la quinta parte de $\frac{13}{26}$ en un entero?

- a) 0,1
- b) 0,5
- c) 2,5
- d) 5
- e) 10

24. Si $m = 4 \cdot 1/3$, $p = 8 \cdot 1/6$ y $q = 6 \cdot 1/8$, entonces ¿cuál de las siguientes relaciones es verdadera?

- a) $m > p$
- b) $q > m$
- c) $p > m$
- d) $q > p$
- e) $m > q$